

Rationale Punkte auf Hyperflächen im projektiven Raum

Jörg Jahnel

Helmut-Schmidt-Universität,
Universität der Bundeswehr Hamburg

9.7.2009

Problem (Diophantische Gleichung)

Beschreibe für ein gegebenes Polynom $f \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$ die Menge

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid f(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

in expliziter Weise.

Realistischere Frage vom algorithmischen Standpunkt:

Problem (Diophantische Gleichung – Suche nach Lösungen)

Beschreibe für $f \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$ und $B > 0$ die Menge

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid f(x_0, \dots, x_n) = 0, |x_i| \leq B\}$$

explizit.

B heißt typischerweise die *Suchschränke*.

- Ganze Punkte auf einer n -dimensionalen Hyperfläche im \mathbf{A}^{n+1} .

- Ganze Punkte auf einer n -dimensionalen Hyperfläche im \mathbf{A}^{n+1} .
- Ist f homogen: Rationale Punkte auf einer $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperfläche $V_f \subset \mathbf{P}^n$.

Eine statistische Vorhersage

$$Q(B) := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid |x_i| \leq B\}$$

Also

$$\#Q(B) = (2B + 1)^{n+1} \sim C_1 \cdot B^{n+1}.$$

Andererseits ist

$$\max_{(x_0, \dots, x_n) \in Q(B)} |f(x_0, \dots, x_n)| \sim C_2 \cdot B^{\deg f}.$$

Die Annahme, die Werte von f auf $Q(B)$ wären gleichverteilt, führt uns also zur Vermutung

$$\#\{(x_0, \dots, x_n) \in V_f(\mathbb{Q}) \mid |x_0|, \dots, |x_n| \leq B\} \sim C \cdot B^{n+1 - \deg f}$$

für das asymptotische Wachstum der Lösungsanzahl.

Die statistische Vorhersage erklärt die folgenden wohlbekanntenen Beispiele.

- $n + 1 - \deg f < 0$: Sehr wenige Lösungen.

Beispiel: $x^k + y^k = z^k$ für $k \geq 4$.

Die statistische Vorhersage erklärt die folgenden wohlbekanntenen Beispiele.

- $n + 1 - \deg f < 0$: Sehr wenige Lösungen.

Beispiel: $x^k + y^k = z^k$ für $k \geq 4$.

- $n + 1 - \deg f = 0$: Einige Lösungen.

Beispiel: $y^2z = x^3 + 8xz^2$,

Elliptische Kurven.

Weiteres Beispiel: $x^4 + 2y^4 = z^4 + 4w^4$,

Flächen vom Typ $K3$.

Die statistische Vorhersage erklärt die folgenden wohlbekannteren Beispiele.

- $n + 1 - \deg f < 0$: Sehr wenige Lösungen.

Beispiel: $x^k + y^k = z^k$ für $k \geq 4$.

- $n + 1 - \deg f = 0$: Einige Lösungen.

Beispiel: $y^2z = x^3 + 8xz^2$,

Elliptische Kurven.

Weiteres Beispiel: $x^4 + 2y^4 = z^4 + 4w^4$,

Flächen vom Typ $K3$.

- $n + 1 - \deg f > 0$: Viele Lösungen.

Beispiel: $x^2 + y^2 = z^2$,

Kegelschnitte.

Weiteres Beispiel: $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0$,

Kubische Flächen.

- Unlösbarkeit

- Unlösbarkeit im Reellen,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

- p -adische Unlösbarkeit,

$$u^3 + 2v^3 + 7w^3 + 14x^3 + 49y^3 + 98z^3 = 0.$$

- Gegenbeispiele zum Hasseprinzip,

(Brauer-Manin-Obstruktion, unbekannte Obstruktionen?).

- Unlösbarkeit

- Unlösbarkeit im Reellen,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

- p -adische Unlösbarkeit,

$$u^3 + 2v^3 + 7w^3 + 14x^3 + 49y^3 + 98z^3 = 0.$$

- Gegenbeispiele zum Hasseprinzip,

(Brauer-Manin-Obstruktion, unbekannte Obstruktionen?).

- “Akkumulierende” Untervarietäten:

$x^3 + y^3 = z^3 + w^3$ definiert eine kubische Fläche $V \subset \mathbf{P}^3$,

$$\#\{(x_0, \dots, x_n) \in V(\mathbb{Q}) \mid |x_0|, \dots, |x_n| \leq B\} \sim C \cdot B$$

wird vorhergesagt.

V enthält jedoch die Gerade, gegeben durch $x = z$, $y = w$, auf der bereits quadratisches Wachstum auftritt.

Die Maninsche Vermutung

Betrachte den Fall $n + 1 - \deg f > 0$.

Vermutung (Manin)

Sei V_f eine glatte Hyperfläche im \mathbf{P}^n . Nimm $n + 1 - \deg f > 0$ an. Dann gilt

$$\#\{(x_0, \dots, x_n) \in V^\circ(\mathbb{Q}) \mid |x_0|, \dots, |x_n| \leq B\} \sim C \cdot B^k \log^{r-1} B.$$

Hierbei werden $k := n + 1 - \deg f$ und $r = \text{rk Pic } V$ gesetzt.

Bemerkungen

- C ist eine explizite Konstante, deren Beschreibung auf E. Peyre zurückgeht.
- Die Annahme $n + 1 - \deg f > 0$ impliziert, dass V_f eine Fano-Varietät ist.

Was ist bekannt?

- Manins Vermutung ist wahr für $n \gg 2^{\deg f}$ (Kreismethode).
[Birch, B. J.: *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. Ser. A **265** (1961/1962), 245–263]

Was ist bekannt?

- Manins Vermutung ist wahr für $n \gg 2^{\deg f}$ (Kreismethode).
[Birch, B. J.: *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. Ser. A **265** (1961/1962), 245–263]
- Manins Vermutung ist für viele spezielle Varietäten niedriger Dimension bewiesen worden, zum Beispiel für
 - verallgemeinerte Flaggenvarietäten (Franke, Manin, Tschinkel),
 - projektive glatte torische Varietäten (Batyrev und Tschinkel),
 - einige torische Faserungen über verallgemeinerten Flaggenvarietäten (Strauch und Tschinkel),
 - glatte äquivariante Kompaktifizierungen affiner Räume (Chambert-Loir und Tschinkel),
 - $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^2$, aufgeblasen in bis zu vier Punkten in allgemeiner Lage (Salberger, de la Bretèche).

Was ist bekannt?

- Manins Vermutung ist wahr für $n \gg 2^{\deg f}$ (Kreismethode).
[Birch, B. J.: *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. Ser. A **265** (1961/1962), 245–263]
- Manins Vermutung ist für viele spezielle Varietäten niedriger Dimension bewiesen worden, zum Beispiel für
 - verallgemeinerte Flaggenvarietäten (Franke, Manin, Tschinkel),
 - projektive glatte torische Varietäten (Batyrev und Tschinkel),
 - einige torische Faserungen über verallgemeinerten Flaggenvarietäten (Strauch und Tschinkel),
 - glatte äquivariante Kompaktifizierungen affiner Räume (Chambert-Loir und Tschinkel),
 - $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^2$, aufgeblasen in bis zu vier Punkten in allgemeiner Lage (Salberger, de la Bretèche).
- Wenn Manins Vermutung für X und Y zutrifft, dann auch für $X \times Y$ (Franke, Manin, Tschinkel).

Was ist bekannt?

- Manins Vermutung ist wahr für $n \gg 2^{\deg f}$ (Kreismethode).
[Birch, B. J.: *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. Ser. A **265** (1961/1962), 245–263]
- Manins Vermutung ist für viele spezielle Varietäten niedriger Dimension bewiesen worden, zum Beispiel für
 - verallgemeinerte Flaggenvarietäten (Franke, Manin, Tschinkel),
 - projektive glatte torische Varietäten (Batyrev und Tschinkel),
 - einige torische Faserungen über verallgemeinerten Flaggenvarietäten (Strauch und Tschinkel),
 - glatte äquivariante Kompaktifizierungen affiner Räume (Chambert-Loir und Tschinkel),
 - $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^2$, aufgeblasen in bis zu vier Punkten in allgemeiner Lage (Salberger, de la Bretèche).
- Wenn Manins Vermutung für X und Y zutrifft, dann auch für $X \times Y$ (Franke, Manin, Tschinkel).
- Manins Vermutung ist *offen* für glatte kubische Flächen. (Es gibt jedoch viel numerische Evidenz [Heath-Brown, Peyre-Tschinkel].)

Experimentelles Ergebnis (Elsenhans, J.)

Es gibt numerische Evidenz für Manins Vermutung im Falle der Hyperflächen im $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^4$, die durch $ax^e = by^e + z^e + v^e + w^e$ für $e = 3$ and 4 gegeben sind.

Dies erfordert Algorithmen zur

- Lösung Diophantischer Gleichungen,

Experimentelles Ergebnis (Elsenhans, J.)

Es gibt numerische Evidenz für Manins Vermutung im Falle der Hyperflächen im $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^4$, die durch $ax^e = by^e + z^e + v^e + w^e$ für $e = 3$ and 4 gegeben sind.

Dies erfordert Algorithmen zur

- Lösung Diophantischer Gleichungen,
- Berechnung von Peyres Konstante,

Experimentelles Ergebnis (Elsenhans, J.)

Es gibt numerische Evidenz für Manins Vermutung im Falle der Hyperflächen im $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^4$, die durch $ax^e = by^e + z^e + v^e + w^e$ für $e = 3$ and 4 gegeben sind.

Dies erfordert Algorithmen zur

- Lösung Diophantischer Gleichungen,
- Berechnung von Peyres Konstante,
- Auffindung akkumulierender Untervarietäten.

Das folgende Beispiel war für uns der Ausgangspunkt.

Example (Sir P. Swinnerton-Dyer, 2002)

Die Gleichung

$$x^4 + 2y^4 = z^4 + 4w^4$$

definiert eine $K3$ -Fläche S in \mathbf{P}^3 .

$(1 : 0 : 1 : 0)$ und $(1 : 0 : (-1) : 0)$ sind \mathbb{Q} -rationale Punkte auf S , die beiden *offensichtlichen* Punkte.

Gibt es einen weiteren \mathbb{Q} -rationalen Punkt auf S ?

Wie sucht man nach einer Lösung von $x^4 + 2y^4 = z^4 + 4w^4$?

Algorithmus (Ein naiver Algorithmus)

Schreibe die Gleichung als $x^4 + 2y^4 - 4w^4 = z^4$.

Lasse x , y , and w in einer Dreifachschleife laufen und test jeweils, ob $x^4 + 2y^4 - 4w^4$ eine vierte Potenz ist.

Komplexität: $C \cdot B^3$.

Realistische Suchschranke: 50 000.

(Wir haben einen Probelauf mit Suchschranke 10 000 durchgeführt.)

Ein Algorithmus zur Lösung Diophantischer Gleichungen III

Wie sucht man nach einer Lösung von $x^4 + 2y^4 = z^4 + 4w^4$?

Algorithmus (Ein besserer Algorithmus)

Die beiden Mengen $\{x^4 + 2y^4 \mid |x|, |y| \leq B\}$ und $\{z^4 + 4w^4 \mid |z|, |w| \leq B\}$ haben jeweils $\sim B^2$ Elemente. Zähle diese auf und bilde den Durchschnitt.

Fakten

- *Komplexität:* $O(B^2 \log B)$ (Sortieren, D. Bernstein),
 $O(B^2)$ (Hashing, angenommen gleichmäßig, Elsenhans+J.).
- *Speicherverbrauch:* $O(B^2)$ (naiv),

Suche nach Lösungen Diophantischer Gleichungen – Hashing

Unsere Methode funktioniert für Diophantische Gleichungen der Form

$$f(x_1, \dots, x_k) = g(y_1, \dots, y_l).$$

Suche nach Lösungen Diophantischer Gleichungen – Hashing II

Schreiben

Wir speichern die Vektoren (x_1, \dots, x_k) in einer Hashtabelle (für bis zu 2^{27} Einträge). Die *Hashfunktion* $H: \mathbb{Z} \rightarrow [0, 2^{27} - 1]$ wird durch eine Auswahl von Bits gegeben. Das heißt,

$$H(z) := \text{eine Auswahl der Bits von } (z \bmod 2^{64}).$$

Für jeden Vektor (x_1, \dots, x_k) definiert der Ausdruck $H(f(x_1, \dots, x_k))$ seine Position in der Hashtabelle.

Neben (x_1, \dots, x_k) speichern wir auch einen 31-Bit-Kontrollwert $K(f(x_1, \dots, x_k))$,

$$K(z) := \text{eine Auswahl der verbleibenden Bits von } (z \bmod 2^{64}).$$

Lesen

Wir suchen dann nach Vektoren (y_1, \dots, y_l) , für die Hash- und Kontrollwert in der Tabelle vorkommen.

Bemerkungen

- 1 Unter der Annahme, dass das Hashing gleichmäßig erfolgt (was impliziert, dass nicht allzu viele Lösungen existieren), ist die erwartete Laufzeit $O(B^{\max(k,l)})$.

Kongruenzbedingungen können helfen, die O -Konstante zu reduzieren.

Bemerkungen

- 1 Unter der Annahme, dass das Hashing gleichmäßig erfolgt (was impliziert, dass nicht allzu viele Lösungen existieren), ist die erwartete Laufzeit $O(B^{\max(k,l)})$.

Kongruenzbedingungen können helfen, die O -Konstante zu reduzieren.

- 2 Der Algorithmus findet in Wirklichkeit *Pseudo-Lösungen*, bei denen eine Übereinstimmung der Kontrollwerte und eine „Fast-Übereinstimmung“ der Hashwerte auftritt.

Eine *Nachbearbeitung* mit exakter Langzahlarithmetik ist notwendig (Aribas, GMP).

Idee (Paging)

Wähle $m \in \mathbb{Z}$ hinreichend groß. Bilde die Mengen

$$L_c := \{f(x_1, \dots, x_k) \mid |x_1|, \dots, |x_k| \leq B, f(x_1, \dots, x_k) \equiv c \pmod{m}\}$$

und

$$R_c := \{g(y_1, \dots, y_l) \mid |y_1|, \dots, |y_l| \leq B, g(y_1, \dots, y_l) \equiv c \pmod{m}\}$$

und arbeite für jedes c separat.

- Speicherverbrauch: Verringert auf $B^{\max(k,l)}/m$ (unter Annahme der Gleichverteilung).
- Man kann parallel auf mehreren Maschinen rechnen.

Wir wählen die *Seitenanzahl* m als eine Primzahl. Dann implizieren die Weil-Vermutungen, die durch P. Deligne bewiesen wurden, eine A-priori-Schranke für die Hashauslastung.

Die Gleichung $x^4 + 2y^4 = z^4 + 4w^4 -$ Optimierung durch Kongruenzbedingungen I

x und z sind ungerade, y und w sind gerade.

- Fall 1: $5|y, w \quad (\implies 5 \nmid x, z)$.
Dann muss $x^4 \equiv z^4 \pmod{625}$ gelten.
Wir schreiben die Paare (x, z) und hashen $x^4 - z^4$. Wir lesen $4w^4 - 2y^4$.
- Fall 2: $5|x, y \quad (\implies 5 \nmid z, w)$.
Dann muss $z^4 + 4w^4 \equiv 0 \pmod{625}$ gelten.
Hier schreiben wir die Paare (z, w) und hashen $z^4 + 4w^4$. Wir lesen $x^4 + 2y^4$.

Diese Kongruenzen sind sehr stark. Sie reduzieren die Anzahl der Schreibschritte auf 0.512% und die Anzahl der Leseschritte auf 4%.

Eine neue Lösung – Antwort auf Sir P. Swinnerton-Dyers Frage

Rechnung

==> $1484801^{**4} + 2 * 1203120^{**4}.$

-: 90509_10498_47564_80468_99201

==> $1169407^{**4} + 4 * 1157520^{**4}.$

-: 90509_10498_47564_80468_99201

Eine neue Lösung – Antwort auf Sir P. Swinnerton-Dyers Frage

Rechnung

$$\Rightarrow 1484801^{**4} + 2 * 1203120^{**4}.$$

$$-: 90509_10498_47564_80468_99201$$

$$\Rightarrow 1169407^{**4} + 4 * 1157520^{**4}.$$

$$-: 90509_10498_47564_80468_99201$$

Theorem (Elsenhans, J.)

Bis auf Vorzeichenwechsel ist $(1\ 484\ 801 : 1\ 203\ 120 : 1\ 169\ 407 : 1\ 157\ 520)$ der einzige nicht offensichtliche \mathbb{Q} -rationale Punkt von Höhe $\leq 10^8$ auf Sir P. Swinnerton-Dyers Fläche S .

Das heißt, auf S existieren genau zehn \mathbb{Q} -rationale Punkte der Höhe $\leq 10^8$.

Eine neue Lösung – Antwort auf Sir P. Swinnerton-Dyers Frage II

Bemerkungen

- Die neue Lösung wurde von einer Zwischenversion unserer Programme für Suchweite $2.5 \cdot 10^6$ gefunden.
- Die Endversion (für Suchweite 10^8) brauchte fast genau 100 Tage CPU-Zeit auf einem AMD-Opteron-248-Prozessor. Diese Zeit verteilt sich beinahe gleichmäßig auf 50 Tage für Fall 1 und 50 Tage für Fall 2.
- Die Rechnungen wurden am Gauß-Labor für wissenschaftliches Rechnen in Göttingen parallel auf den zwei Prozessoren eines Fire-V20z-Servers von Sun durchgeführt.

Betrachte nun die Hyperflächen in $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^4$ gegeben durch

$$ax^e - by^e = z^e + v^e + w^e$$

für $e = 3$ und 4 .

Bemerkungen

- 1 Die Suche nach \mathbb{Q} -rationalen Punkten hat offenbar Komplexität $O(B^3)$.
- 2 Wenn wir $O(B)$ Varietäten (die sich nur in a und b unterscheiden) simultan behandeln, dann ist die Laufzeit *immer noch* $O(B^3)$.

Wir haben die Varietäten für $a, b = 1, \dots, 100$ (d.h. 5 000 Kubiken and 10 000 Quartiken) mit einer Suchschranke von 5 000 (Kubiken) bzw. 100 000 (Quartiken), untersucht.

Vermutung (Manins Vermutung – Version für Hyperflächen im \mathbf{P}^n)

Sei die glatte Varietät $V_f \subset \mathbf{P}^n$ gegeben durch $f = 0$. Dann gilt

$$\#\{(x_0, \dots, x_n) \in V^\circ(\mathbb{Q}) \mid |x_0|, \dots, |x_n| \leq B\} \sim C \cdot B^k \log^{r-1} B,$$

für $k = n + 1 - \deg(f)$ und $r = rk \text{ Pic } V$.

Hierbei ist C eine explizite Konstante (die auf E. Peyre zurückgeht),
[Peyre, E.: *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), 101–218, Définition 2.3].

Definition (Peyre's constant)

Für $n \geq 4$ ist *Peyres Konstante* die Tamagawazahl

$$C := \prod_{p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \tau_p,$$

wobei

$$\tau_p = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\#V(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})}{p^{m \dim(V)}} \quad \text{für } p \in \mathbb{P}$$

und

$$\tau_\infty = \frac{1}{2} \int_{\substack{f(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ |x_0|, \dots, |x_n| \leq 1}} \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} dx_0 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n.$$

Bemerkung

Bei der Bestimmung von Peyres Konstante

- verlangen die unendliche Primstelle und die Stellen schlechter Reduktion einen gewissen Programmieraufwand.
- Aber der Hauptaufwand entfällt auf die Stellen guter Reduktion, an denen man die Lösungen der Gleichung $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ über den endlichen Körpern \mathbb{F}_p (statt \mathbb{Z}) zählen muss.

Ein Algorithmus zur Bestimmung der Lösungsanzahl II

Wir betrachten eine Gleichung der Form

$$(*) \quad \sum_{i=0}^n f_i(x_i) = 0.$$

Bezeichne dann mit $d^{(i)}(k) := \#\{x \in \mathbb{F}_p \mid f_i(x) = k\}$ die Anzahlen der Darstellungen durch die Summanden. Die Anzahl der Lösungen von $(*)$ ist dann gleich

$$(d^{(0)} * d^{(1)} * \dots * d^{(n)})(0).$$

Idee (des Algorithmus zur Bestimmung der Peyreschen Konstante)

Benutze die schnelle Fouriertransformation (FFT), um die Faltung $d^{(0)} * d^{(1)} * \dots * d^{(n)}$ zu berechnen.

Bemerkungen (Komplexität)

- Wir müssen n Faltungen von Vektoren der Länge p berechnen.
- Eine Faltung benötigt $O(p \log p)$ Rechenschritte.

Untersuchung der kubischen Dreifaltigkeiten I

Auf den kubischen Dreifaltigkeiten $V_{a,b}^3$, gegeben durch

$$ax^3 = by^3 + z^3 + v^3 + w^3$$

für $a, b = 1, \dots, 100$ und $b \leq a$, haben wir alle \mathbb{Q} -rationalen Punkte der Höhe bis 5 000 bestimmt.

Die Punkte auf \mathbb{Q} -rationalen Geraden auf $V_{a,b}$ wurden von der Zählung ausgeschlossen. Die kleinste gefundene Punktzahl war 3 930 278 für $(a, b) = (98, 95)$. Die größten Punktzahlen waren 332 137 752 für $(a, b) = (7, 1)$ und 355 689 300 im Falle $a = 1$ und $b = 1$.

Andererseits haben wir für jede Dreifaltigkeit $V_{a,b}^3$ mit $a, b = 1, \dots, 100$ und $b + 3 \leq a$ die (nach Manin-Peyre) erwarteten Punktzahlen und die Quotienten

$$\# \{ \text{Punkte der Höhe} < B \text{ gefunden} \} / \# \{ \text{Punkte der Höhe} < B \text{ erwartet} \}$$

berechnet.

Untersuchung der kubischen Dreifaltigkeiten II

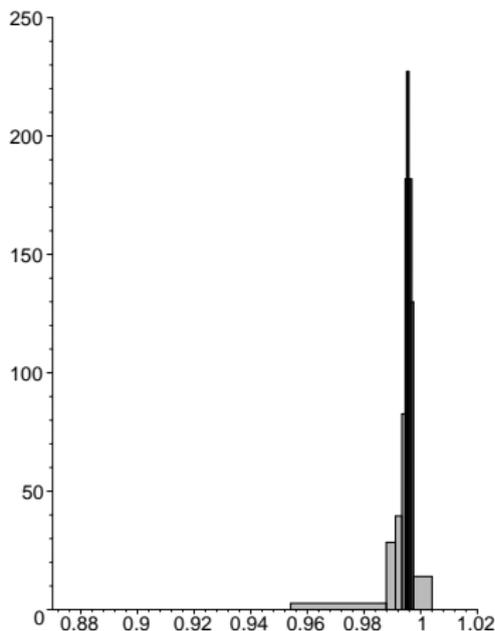
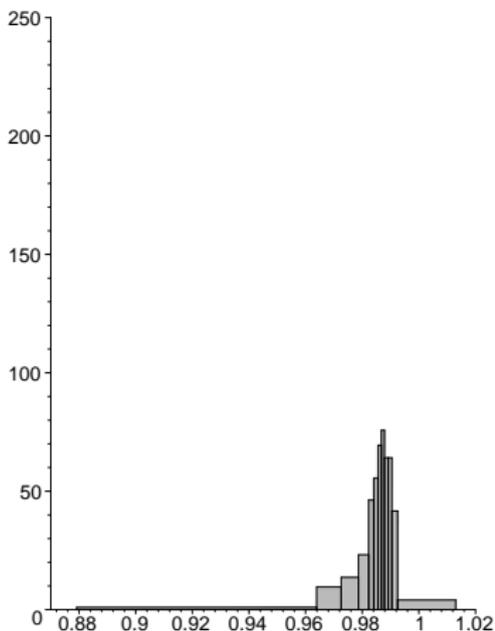


Abbildung: Verteilung der Quotienten für $B = 1000$ und $B = 5000$.

Untersuchung der kubischen Dreifaltigkeiten III

Tabelle: Parameter der Verteilung im Fall der Kubiken

	$B = 1\,000$	$B = 2\,000$	$B = 5\,000$
Mittelwert	0.981 79	0.988 54	0.993 83
Standardabweichung	0.012 74	0.008 23	0.004 55

Untersuchung der quartischen Dreifaltigkeiten I

Auf den quartischen Dreifaltigkeiten $V_{a,b}^4$, gegeben durch

$$ax^4 = by^4 + z^4 + v^4 + w^4$$

für $a, b = 1, \dots, 100$, haben wir alle \mathbb{Q} -rationalen Punkte der Höhe bis 100 000 bestimmt.

Es stellte sich heraus, dass auf 5 015 dieser Varietäten keine \mathbb{Q} -rationalen Punkte vorkommen, weil die Gleichung in \mathbb{Q}_p für $p = 2, 5$ oder 29 , unlösbar ist. In dieser Situation ist Manins Vermutung trivialerweise richtig.

Bei den verbleibenden Varietäten wurden die Punkte, die auf einem bekannten, in $V_{a,b}$ enthaltenen \mathbb{Q} -rationalen Kegelschnitt liegen, von der Zählung ausgeschlossen.

Untersuchung der quartischen Dreifaltigkeiten II

Tabelle: Anzahlen von Punkten der Höhe $< 100\,000$ auf den Quartiken.

a	b	# der Punkte	# nicht auf Kegelschnitt	# erwartet (nach Manin-Peyre)
29	29	2	2	135
58	87	288	288	272
58	58	290	290	388
87	87	386	386	357
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
34	1	9 938 976	5 691 456	5 673 000
17	64	5 708 664	5 708 664	5 643 000
1	14	7 205 502	6 361 638	6 483 000
3	1	12 657 056	7 439 616	7 526 000

Untersuchung der quartischen Dreifaltigkeiten III

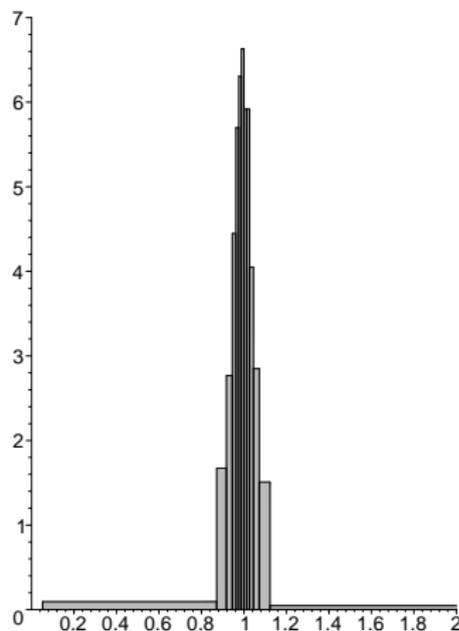
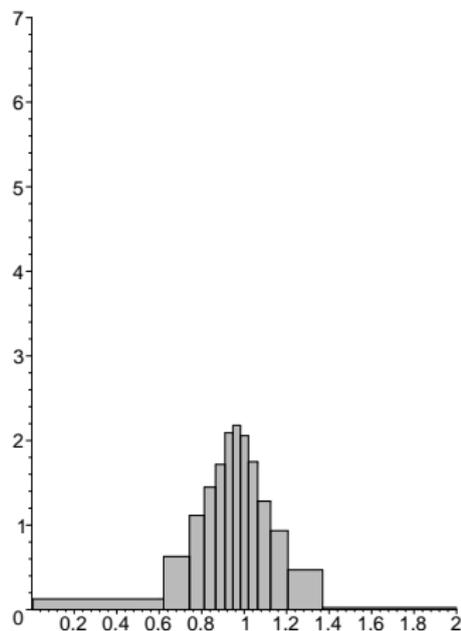


Abbildung: Verteilung der Quotienten für $B = 1000$ and $B = 10000$.

Untersuchung der quartischen Dreifaltigkeiten IV

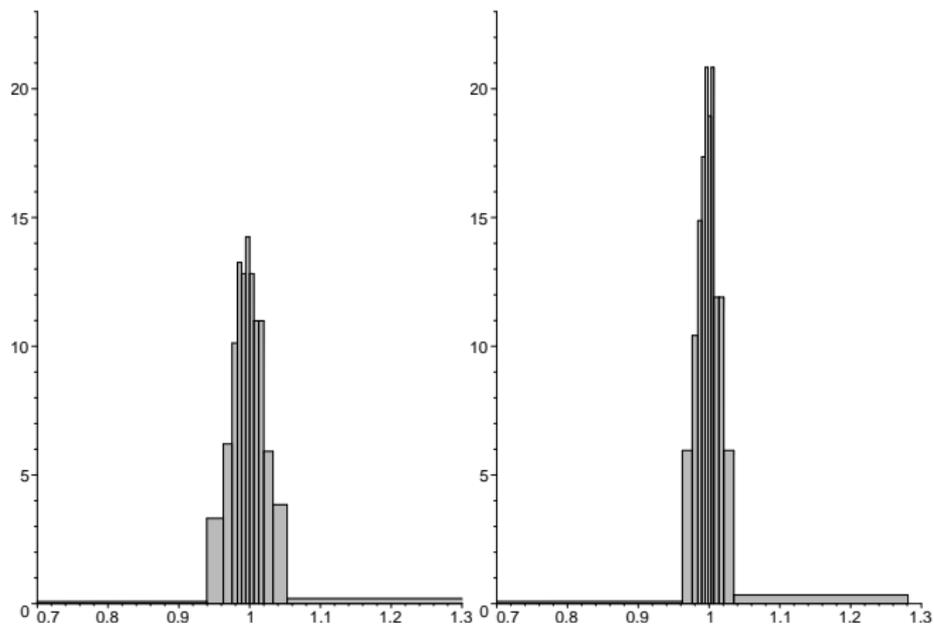


Abbildung: Verteilung der Quotienten für $B = 50\,000$ and $B = 100\,000$.

Untersuchung der quartischen Dreifaltigkeiten V

Tabelle: Parameter der Verteilung im Fall der Quartiken

	$B = 1\,000$	$B = 10\,000$	$B = 100\,000$
Mittelwert	0.9853	0.9957	0.9982
Standardabweichung	0.3159	0.1130	0.0372

Bemerkung

Im Falle der Kubiken waren die Standardabweichungen wesentlich kleiner als hier bei den Quartiken.

Dies ist nicht überraschend, da auf einer Kubik wesentlich mehr Punkte zu erwarten sind als auf einer Quartik (quadratisches gegen lineares Wachstum). Dadurch sind die Statistiken im Falle der Kubiken zuverlässiger.

Untersuchung der quartischen Dreifaltigkeiten VI

Suchschränke 50000 --
Farbe stellt Quotienten bei Suchschränke 10000 dar

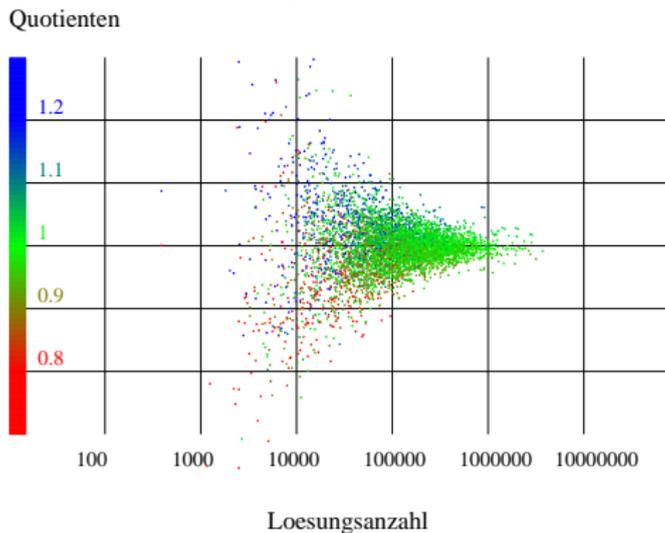


Abbildung: Anzahl der Lösungen und Quotienten für $B = 50\,000$.

Zusammenfassung

- *Zur systematischen Suche nach Lösungen Diophantischer Gleichungen wie $x^4 + 2y^4 = z^4 + 4w^4$ oder $7x^3 = 11y^3 + z^3 + v^3 + w^3$ (in $n \geq 4$ Variablen) gibt es Methoden, die schneller sind als die offensichtliche $(n-1)$ -fach iterierte Schleife.
(Im Wesentlichen brauchen wir $O(B^{\lceil n/2 \rceil})$ Schritte).*

Zusammenfassung

- *Zur systematischen Suche nach Lösungen Diophantischer Gleichungen wie $x^4 + 2y^4 = z^4 + 4w^4$ oder $7x^3 = 11y^3 + z^3 + v^3 + w^3$ (in $n \geq 4$ Variablen) gibt es Methoden, die schneller sind als die offensichtliche $(n-1)$ -fach iterierte Schleife.*

(Im Wesentlichen brauchen wir $O(B^{\lceil n/2 \rceil})$ Schritte).

- *Zählen der Lösungen über \mathbb{F}_p (ohne sie sämtlich zu bestimmen) geht noch schneller ($O(np \log p)$ Schritte).*

Zusammenfassung

- *Zur systematischen Suche nach Lösungen Diophantischer Gleichungen wie $x^4 + 2y^4 = z^4 + 4w^4$ oder $7x^3 = 11y^3 + z^3 + v^3 + w^3$ (in $n \geq 4$ Variablen) gibt es Methoden, die schneller sind als die offensichtliche $(n-1)$ -fach iterierte Schleife.*

(Im Wesentlichen brauchen wir $O(B^{\lceil n/2 \rceil})$ Schritte).

- *Zählen der Lösungen über \mathbb{F}_p (ohne sie sämtlich zu bestimmen) geht noch schneller ($O(np \log p)$ Schritte).*
- *Diese beiden Beobachtungen können benutzt werden, um Manins Vermutung numerisch zu testen.*

Zusammenfassung

- *Zur systematischen Suche nach Lösungen Diophantischer Gleichungen wie $x^4 + 2y^4 = z^4 + 4w^4$ oder $7x^3 = 11y^3 + z^3 + v^3 + w^3$ (in $n \geq 4$ Variablen) gibt es Methoden, die schneller sind als die offensichtliche $(n-1)$ -fach iterierte Schleife.*

(Im Wesentlichen brauchen wir $O(B^{\lceil n/2 \rceil})$ Schritte).

- *Zählen der Lösungen über \mathbb{F}_p (ohne sie sämtlich zu bestimmen) geht noch schneller ($O(np \log p)$ Schritte).*
- *Diese beiden Beobachtungen können benutzt werden, um Manins Vermutung numerisch zu testen.*

Bemerkung (Schlussfolgerung)

Die Ergebnisse zeigen, dass Manins Vermutung für die beiden betrachteten Familien richtig sein sollte.