Das Alexanderpolynom von Verschlingungen
- Diplomarbeit -

vorgelegt von Bernd Grave Jakobi
bei Prof. Dr. Wolfgang Lück

Münster, im Dezember 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit sollen verschiedene Interpretationen und Definitionen der Alexanderpolynome von Verschlingungen erläutert und verglichen werden. Es handelt sich nicht um eine Zusammenfassung allen Wissens über das Alexanderpolynom. Insbesondere über viele interessante Eigenschaften des Alexanderpolynoms wird man in dieser Arbeit nichts erfahren.

Um das Alexanderpolynom zu definieren, benutzen wir spezielle Invarianten endlich erzeugter Moduln, und zwar die Elementarideale und ihre größten gemeinsamen Teiler. Diese Modulinvarianten werden im ersten Abschnitt betrachtet. Auch Resultate über die Beziehungen zwischen den Elementaridealen eines Moduls und denen eines Untermoduls, die wir später benötigen, beweisen wir schon im ersten Abschnitt.

Im zweiten Abschnitt werden dann die Alexanderpolynome definiert. Es werden keine Kenntnisse der Knotentheorie vorausgesetzt. Zuerst werden Verschlingungen eingeführt. Dann wird für die Fundamentalgruppe des Komplements einer Verschlingung die sogenannte Wirtingerpräsentation berechnet. Danach streben wir die Definition der Alexandermoduln an: Wegen der Operation der Deckbewegungen auf einer Überlagerung werden die Gruppen der singulären Homologie des überlagernden Raums zu Moduln über dem Gruppenring der Deckbewegungen. Betrachten wir die maximale abelsche Überlagerung, so sind die entsprechenden Homologiemoduln gerade die Alexandermoduln. In der Literatur werden die Alexandermoduln gelegentlich anders definiert (vgl. z. B. [11]). Der erste Alexandermodul und die Abelianisierung der Kommutatoruntergruppe der Fundamentalgruppe des Verschlingungskomplements sind gleich. Für den ersten Alexandermodul existieren die im ersten Abschnitt definierten Invarianten, da es sich dabei um einen endlich erzeugten Modul über einem noetherschen und faktoriellen Ring handelt. Die größten gemeinsamen Teiler der Elementarideale sind die Alexanderpolynome. Im Falle einer mehrkomponentigen Verschlingung handelt es sich um „Polynome“ in mehreren Variablen. Nach Gleichsetzen dieser Variablen erhalten wir die reduzierten Alexanderpolynome.

In den Abschnitten 3, 4 und 5 werden verschiedene Präsentationen des Alexandermoduls bzw. verwandter Moduln hergeleitet.

In Abschnitt 3 betrachten wir ausschließlich Knoten. Wir werden zunächst eine Bedingung dafür suchen, dass sich eine Abbildung der Erzeuger einer Wirtingerpräsentation in die Gruppe $GA(\mathbb{C})$ der invertierbaren, affin linearen Abbildungen von $\mathbb{C}$ zu einem Gruppenhomomorphismus fortsetzen lässt. Als Bedingung erhalten wir ein lineares Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix sich als Präsentationsmatrix des Alexandermoduls herausstellen wird. Dies beweisen wir, indem wir ad hoc ausgehend von einer Wirtingerpräsentation eine Präsentationsmatrix des Alexandermoduls berechnen und dabei die gleiche Matrix wie zuvor erhalten.

In Abschnitt 4 berechnen wir für beliebige Verschlingungen eine Präsentation desjenigen Moduls, der in der Literatur oft als Alexandermodul definiert wird (nicht so in dieser Arbeit). Dazu benutzen wir einen Differentialkalkül, den sogenannten Fox-Kalkül, mit dem sich das Hochheben von Wegen in einen überlagernden Raum algebraisch beschreiben lässt. Danach soll erklärt werden, wie man daraus die Alexanderpolynome erhält.

In Abschnitt 5 sehen wir, dass wir zu jeder Verschlingung eine Seifertfläche konstruieren können. Eine Seifertfläche ist eine Fläche mit bestimmten Eigenschaften, deren Rand die vorgegebene Verschlingung ist. Aufschneiden der 3-Sphäre entlang dieser Fläche und Hintereinanderkleben abzählbar vieler der so entstandenen berandeten Räume ergibt eine Überlagerung des Verschlingungskomplements. Für den ersten Homologiemodul dieser Überlagerung werden wir mit Hilfe von Verschlingungszahlen eine endliche Präsentation berechnen und erläutern, wie man damit die reduzierten Alexanderpolynome berechnen kann.

Für den Alexandermodul einer mehrkomponentigen Verschlingung selber wird also in dieser Arbeit keine Präsentation berechnet. Mir ist auch nicht bekannt, ob dies möglich ist.

Die abschließenden Abschnitte sind anderen Sichtweisen auf das Alexanderpolynom gewidmet.

Zuerst sehen wir, dass das reduzierte Alexanderpolynom eine Entwirrungsinvariante ist. Entwirrungsinvarianten von Verschlingungen sind Invarianten, die sich durch „sukzessives Entknoten“ berechnen lassen.

Anschließend wird das Alexanderpolynom als Torsion eines Kettenkomplexes angesehen. Dabei handelt es sich um den mit dem Quotientenkörper des Gruppenrings tensorierten, zellulären Kettenkomplex der maximalen abelschen Überlagerung des CW-Komplexes zur Wirtingerpräsentation einer Verschlingung.

Als Quellen, an denen sich die einzelnen Abschnitte orientieren, sind [24] für die Abschnitte 1 und 7, [11] für die Abschnitte 2, 4 und 5, [21] für den Abschnitt 3 und [16] für den Abschnitt 6 hervorzuheben.

Ich möchte mich bedanken bei Wolfgang Lück für das interessante und meinen Wünschen entsprechende Thema und die effektive Betreuung dieser Diplomarbeit, bei Thomas Schick, Arthur Bartels und Michael Joachim für hilfreiche Tipps, bei Marco Varisco und Juliane Sauer für Trost und Hilfe bei LaTeX-Schwierigkeiten und bei Julius Verrell, Benedikt Plitt, Thomas Moosbrucker, Johannes Warnecke und Anja Panse für das Lesen dieser Arbeit und zahlreiche Hinweise auf Tippfehler.

Münster, den 15. Dezember 2001

1 Invarianten endlich erzeugter Moduln

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement $1 \neq 0$ und M ein endlich erzeugter Modul[1] über R. Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

Die Standardbasis des R^m bezeichnen wir mit $e_1, \ldots, e_m$. Im Fall $m \leq n$ gilt $R^m \subset R^n$, wenn wir die Standardbasis des R^m mit den ersten m Standardbasiselementen des R^n identifiziert.

Mit $Mat_R(m, n)$ bezeichnen wir die $m \times n$ - Matrizen über R. $A \in Mat_R(m, n)$ besteht aus m Zeilen und n Spalten.

Der Rang eines endlich erzeugten Moduls M ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Elemente in M und wird mit $\operatorname{rk} M$ bezeichnet.

1.1 Präsentation von Moduln

Ähnlich wie Gruppen (vgl. Abschnitt 2.2) kann man auch bestimmte Moduln mit Erzeugern und Relatoren beschreiben.

Definition 1.1 *Eine* ***endliche Präsentation*** *von M ist eine exakte Sequenz*[2] *von R-Moduln der Form*

$$R^r \xrightarrow{\varphi} R^n \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

mit $n, r \in \mathbb{N}$.

Die Moduln $R^n / \ker(\psi)$ und M sind isomorph.

Die Bilder der Standardbasis von R^n unter ψ bilden ein Erzeugendensystem $b_1, \ldots, b_n$ von M, weil ψ surjektiv ist. $b_1, \ldots, b_n$ heißt das zur Präsentation gehörende Erzeugendensystem von M.

Aus jedem Element $v \in R^r$ resultiert eine Gleichung zwischen den Erzeugern $b_1, \ldots, b_n$ von M:

$$0 = \psi \circ \varphi(v) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i$$

wobei $v_1, \ldots, v_n$ gegeben sind durch $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$. Gilt umgekehrt $\sum_{i=1}^{n} v_i b_i = 0$ mit $v_1, \ldots, v_n \in R$, so folgt $\sum_{i=1}^{n} v_i e_i \in \ker(\psi) = \operatorname{im}(\varphi)$. Es gibt also $v \in R^r$ mit $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$.

Definition 1.2 *Die Elemente von* $\operatorname{im}(\varphi) = \ker(\psi)$ *heißen* ***Relatoren*** *der Präsentation. Ein Erzeugendensystem von* $\ker(\psi)$ *nennt man auch ein vollständiges System von Relatoren.*

[1] Der Begriff des Moduls ist eine natürliche Verallgemeinerung des Vektorraumbegriffs. Man lässt einfach als „Grundkörper“ auch Ringe zu. Vergleiche [1] oder [3].

[2] Die Sequenz $\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$ heißt exakt, falls $\ker(\varphi_i) = \operatorname{im}(\varphi_{i-1})$ für alle i, für die es φ_i und φ_{i-1} gibt.

Sei $A \in Mat_R(n,r)$ die darstellende Matrix von φ bzgl. der Standardbasen des R^r und des R^n.

Definition 1.3 *Die zu A transponierte Matrix A^T heißt* ***Präsentationsmatrix*** *von M.*

Die r Zeilen von A^T entsprechen den r Gleichungen, die aus der Standardbasis des R^r resultieren.

Beipiel: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

ist Präsentationsmatrix eines Moduls mit 3 Erzeugern b_1, b_2, b_3, die folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 &= 0 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Seien $a_1, a_2, a_3 \in R$. Es gilt $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ genau dann, wenn die Zeile $(a_1 \quad a_2 \quad a_3)$ eine Linearkombination der Zeilen der Matrix (a_{ij}) ist.

Lemma 1.4 *Falls R noethersch[3] ist, so existiert eine endliche Präsentation von M.*

Beweis: Sei $b_1, \ldots, b_n$ ein Erzeugendensystem von M. Dann ist

$$\psi: \quad R^n \to M \qquad e_i \mapsto b_i$$

ein surjektiver Homomorphismus. $\ker(\psi)$ ist ein Untermodul von R^n. Mit R ist auch R^n und auch jeder Untermodul von R^n noethersch. Jeder noethersche Modul ist aber endlich erzeugt (vgl. [2] Satz 3.24). Es gibt also ein endliches Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_r$ von $\ker(\psi)$. Definiere $\varphi: R^r \to R^n$ durch $\varphi(e_i) := v_i$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$. Jetzt ist

$$R^r \xrightarrow{\varphi} R^n \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

eine endliche Präsentation von M. $\square$

1.2 Elementarideale

Sei $A \in Mat_R(r,n)$. Sei $k \in \mathbb{N}$.

[3]Ein Ring heißt noethersch, falls jede aufsteigende Folge von Idealen irgendwann stationär wird. Vergleiche [2] oder [3].

Definition 1.5 *Sei $k \in \mathbb{N}$. Das* ***Elementarideal*** *k**-ter Ordnung*** *von A ist das Ideal $E_k(A) \subset R$, das von den Unterdeterminanten von A der Ordnung $n-k$ erzeugt wird. Falls $n-k \leq 0$, definiere $E_k(A) := R$. Falls $n-k > r$, dann setze $E_k(A) := 0$.*

Sei $B \in Mat_R(l,l)$. B_{ij} bezeichne die Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Es gilt für alle $i \in \{1, \ldots, l\}$

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{l} (-1)^{i+j} \det(B_{ij}).$$

$\det(B)$ ist also eine Linearkombination von Unterdeterminanten von B. Daraus folgt:

$$E_0(A) \subset E_1(A) \subset E_2(A) \subset \cdots \tag{1}$$

Lemma 1.6 *Seien A und B Präsentationsmatrizen von M. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann $E_k(A) = E_k(B)$.*

Beweis: Es sind zwei endliche Präsentationen gegeben:

$$R^r \xrightarrow{A^T} R^n \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$R^{r'} \xrightarrow{B^T} R^{n'} \xrightarrow{\psi'} M \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Seien $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_{n'}$ die zu den Präsentationen (2) bzw. (3) gehörenden Erzeugendensysteme von M.

1. Schritt: Betrachte das Erzeugendensystem $a_1, \ldots, a_n, b_1$. Es gilt:

$$b_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \text{ mit gewissen } r_i \in R \tag{4}$$

Definiere:

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ -r_1 & \cdots & -r_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\psi}: \quad R^{n+1} \to M \qquad e_i \mapsto \begin{cases} a_i \text{ falls } i \leq n \\ b_1 \text{ falls } i = n+1 \end{cases}$$

Dann ist $R^{r+1} \xrightarrow{\widetilde{A}^T} R^{n+1} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} M \longrightarrow 0$ eine Präsentation von M, denn:

- Die Surjektivität von $\widetilde{\psi}$ folgt aus der Definition.

- Die Spalten von $\widetilde{A}^T$ bilden ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im}(\widetilde{A}^T)$. Wegen (2) und (4) folgt $\operatorname{im}(\widetilde{A}^T) \subset \ker(\widetilde{\psi})$.

- Sei $v = \sum_{i=1}^{n+1} v_i e_i \in \ker(\widetilde{\psi})$ wobei $v_i \in R$.

  1. Es gelte $v_{n+1} = 0$. Dann folgt $\psi(v) = \widetilde{\psi}(v) = 0$. Wegen (2) existiert also $w \in R^m$ mit $A^T w = v$. Für $w \in R^{m+1}$ gilt nun $\widetilde{A}^T w = v$, also $v \in \operatorname{im}(\widetilde{A}^T)$.
  2. Es sei $v_{n+1} \neq 0$. Dann gilt:

$$v = \underbrace{v_{n+1} \cdot \left(e_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} -r_i e_i \right)}_{= \widetilde{A}^T(v_{n+1} e_{r+1})} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (v_i + v_{n+1} r_i) \cdot e_i}_{=: v'}$$

$$v' = v - \widetilde{A}^T(v_{n+1} e_{r+1}) \in \ker(\widetilde{\psi})$$

$$\overset{1.}{\Longrightarrow} v' \in \operatorname{im}(\widetilde{A}^T)$$

$$\Longrightarrow v = \widetilde{A}^T(v_{n+1} e_{r+1}) + v' \in \operatorname{im}(\widetilde{A}^T)$$

2. Schritt: Es gilt $E_k(A) = E_k(\widetilde{A})$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $n - k > 0$ und $n - k \leq r$. Anderenfalls ist die Behauptung klar. (Beachte den Fall $n - k = 0$.) Sei $B \in Mat_R(p, q)$, $Z \subset \{1, \ldots, p\}$ und $Sp \subset \{1, \ldots, q\}$. $B_{Z,Sp}$ bezeichne die Matrix, die aus B entsteht, indem man die Zeilen mit Index aus Z und die Spalten mit Index aus Sp streicht. Seien $Z_k \subset \{1, \ldots, r+1\}$ mit $|Z_k| = r - n + k$ und $Sp_k \subset \{1, \ldots, n+1\}$ mit $|Sp_k| = k$. [4]

- Falls $r + 1 \notin Z_k$ und $n + 1 \notin Sp_k$, so gilt $\det(\widetilde{A}_{Z_k,Sp_k}) = \det(A_{Z_k,Sp_k})$. Da hier alle Unterdeterminanten von A der Ordnung $n-k$ vorkommen, folgt $E_k(A) \subset E_k(\widetilde{A})$.

- Falls $r + 1 \in Z_k$ und $n + 1 \in Sp_k$, so setze $Z_{k-1} := Z_k \cap \{1, \ldots, r\}$, $Sp_{k-1} := Sp_k \cap \{1, \ldots, n\}$. Es gilt nun

$$\det(\widetilde{A}_{Z_k,Sp_k}) = \det(A_{Z_{k-1},Sp_{k-1}}) \in E_{k-1}(A) \subset E_k(A).$$

- Es gelte $r + 1 \in Z_k$ und $n + 1 \notin Sp_k$. Dann gilt $\det(\widetilde{A}_{Z_k,Sp_k}) = 0$.

- Es gelte $r + 1 \notin Z_k$ und $n + 1 \in Sp_k$. Setze $Sp_{k-1} := Sp_k \cap \{1, \ldots, n\}$. Es folgt mit gewissen $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$

$$\det(\widetilde{A}_{Z_k,Sp_k}) = \sum_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus Sp_{k-1}} \varepsilon_j r_j \det\left(A_{Z_k, Sp_{k-1} \cup \{j\}}\right) \in E_k(A).$$

[4] Für eine endliche Menge M bezeichne $|M| \in \mathbb{N}$ die Mächtigkeit der Menge.

Nun folgt auch $E_k(\widetilde{A}) \subset E_k(A)$.

3. Schritt: Wenn man wie im 1. Schritt b_1 so nacheinander auch $b_2, \ldots, b_{n'}$ zum Erzeugendensystem hinzufügt, erhält man nach n'-maliger Anwendung der Schritte 1 und 2 eine neue Präsentation von M mit Präsentationsmatrix $\widehat{A}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $E_k(A) = E_k(\widehat{A})$. In gleicher Weise kann man in n Schritten die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ zum Erzeugendensystem $b_1, \ldots, b_{n'}$ hinzufügen.

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass sich die zu den Präsentationen (2) und (3) gehörenden Erzeugendensysteme von M nur durch eine Permutation unterscheiden.

4. Schritt: Sei σ eine Permutation der Standardbasiselemente des R^n. S bezeichne den durch

$$S: \quad R^n \to R^n \qquad e_i \mapsto \sigma(e_i)$$

gegebenen Automorphismus von R^n und auch die darstellende Matrix dieser linearen Abbildung bzgl. der Standardbasen. Wir erhalten eine weitere Präsentation von M:

$$R^r \xrightarrow{S^{-1} \circ A^T} R^n \xrightarrow{\psi \circ S} M \longrightarrow 0 \tag{5}$$

Begründung:

- Da ψ surjektiv ist, ist auch $\psi \circ S$ surjektiv.
- $(\psi \circ S) \circ (S^{-1} \circ A^T) = \psi \circ A^T = 0 \qquad \Longrightarrow \operatorname{im}(S^{-1} \circ A^T) \subset \ker(\psi \circ S)$
- Sei $v \in \ker(\psi \circ S)$. Dann ist $S(v) \in \ker(\psi) = \operatorname{im}(A^T)$. Es existiert also $w \in R^r$ mit $A^T(w) = S(v)$. Daraus folgt $(S^{-1} \circ A^T)(w) = v$. Somit gilt $\ker(\psi \circ S) \subset \operatorname{im}(S^{-1} \circ A^T)$.

Die Präsentationsmatrix von (5) ist $(S^{-1} \cdot A^T)^T = A \cdot (S^{-1})^T \overset{\clubsuit}{=} A \cdot S$. Die Gleichung ($\clubsuit$) gilt, da $S^{-1} = S^T$.

Nun gilt $E_k(A) = E_k(A \cdot S)$, denn für $Z_k \subset \{1, \ldots, r\}$ mit $|Z_k| = r - n + k$ und $Sp_k \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|Sp_k| = k$ ist

$$\det\left(A_{Z_k, \sigma(Sp_k)}\right) = \pm \det\left((A \cdot S)_{Z_k, Sp_k}\right)$$

wobei hier σ als Permutation von $\{1, \ldots, n\}$ aufgefasst wird.

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $n = n'$ und $a_i = b_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Das ist äquivalent zu $\psi = \psi'$.

5. Schritt: Unter der gerade gemachten Annahme gilt $\operatorname{im}(B) = \ker(\psi') = \ker(\psi) = \operatorname{im}(A)$. Die Spalten von A^T bzw. B^T bilden jeweils ein Erzeugendensystem von $\ker \psi$. Alle Spalten von B^T sind somit Linearkombinationen

der Spalten von A^T und umgekehrt. Aufgrund der Multilinearität der Determinanten ist daher jede Unterdeterminante der Ordnung $n-k$ von $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ eine Linearkombination von Unterdeterminanten der Ordnung $n-k$ von A (bzw. B). Umgekehrt tritt jede Unterdeterminante von A (bzw. B) als Unterdeterminante von $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ auf. Es gilt

$$E_k(A) = E_k\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) = E_k(B).$$

$\square$

Der endlich erzeugte R-Modul M besitze eine endliche Präsentation. Da wir jetzt wissen, dass die Elementarideale aller Präsentationsmatrizen von M gleich sind, können wir die Elementarideale von M definieren.

Definition 1.7 *Sei A eine Präsentationsmatrix von M.*
$E_k(M) := E_k(A) \subset R$ heißt das k-te ***Elementarideal*** *von M.*

Lemma 1.8 *Sei A eine Präsentationsmatrix von M und M' ein weiterer zu M isomorpher R-Modul. Dann gilt $E_k(M) = E_k(M')$.*

Beweis: Sei $\phi : M \to M'$ ein Isomorphismus und

$$R^r \xrightarrow{A^T} R^n \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

eine endliche Präsentation von M. Dann ist

$$R^r \xrightarrow{A^T} R^n \xrightarrow{\phi\circ\psi} M' \longrightarrow 0$$

eine endliche Präsentation von M'. $\square$

1.3 Ordnung von Moduln über faktoriellen Ringen

Sei R ein faktorieller Ring und der endlich erzeugte R-Modul M besitze eine endliche Präsentation.

Definition 1.9 *Für $k \in \mathbb{N}$ definiere*

$$\Delta_k(M) := ggT(E_k(M)) \in R/R^*.$$

Hier bezeichnet R/R^* die Menge der Äquivalenzklassen, wobei $a, b \in R$ genau dann äquivalent sind, wenn es $\varepsilon \in R^*$ gibt, so dass $a = \varepsilon b$.

Jeder Vertreter von $\Delta_k(M)$ in R ist ein Erzeuger des kleinsten Hauptideals, das $E_k(M)$ enthält.

Die Beziehung (1) zwischen den Elementaridealen impliziert

$$\Delta_{k+1}(M) \mid \Delta_k(M) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Für $a, b \in R/R^*$ bedeutet $a|b$, dass es ein $c \in R/R^*$ gibt mit $a \cdot c = b$. Beachte, dass die Multiplikation in R eine Multiplikation auf R/R^* induziert und R/R^* so zu einem kommutativen Monoid[5] wird.

Definition 1.10 *$\Delta_0(M)$ wird auch **Ordnung** von M genannt und mit $ord(M)$ bezeichnet.*

Beispiel: Sei R ein Hauptidealring. Dann gilt

$$M \cong R^m \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} R/p_i^{l_i}R \tag{7}$$

wobei $m, k \in \mathbb{N}$, $p_1 \ldots, p_k \in R$ prim und $l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ (vgl. [1]).

$\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_m$ bezeichne die Standardbasis des R^m und $\widetilde{b}_{m+i}$ sei ein Erzeuger von $R/p_i^{l_i}R$. b_i sei das Element aus M, welches $\widetilde{b}_i$ unter dem Isomorphismus (7) entspricht. Wir erhalten folgende endliche Präsentation von M:

$$R^{m+k} \xrightarrow{A} R^{m+k} \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

Dabei ist $A \in Mat_r(m+k, m+k)$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $0, \ldots, 0, p_1^{l_1}, \ldots, p_k^{l_k}$ auf der Diagonalen. ψ ist gegeben durch $\psi(e_i) := b_i$. Es folgt:

$$ord(M) = \begin{cases} 0 & \text{falls } m > 0 \\ p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} & \text{falls } m = 0 \end{cases}$$

Im Fall $R = \mathbb{Z}$ identifiziere man $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^*$ mit $\mathbb{N}$. Es gilt dann $ord(M) = |M|$, falls $\operatorname{rk} M = m = 0$, und $ord(M) = 0$, falls $\operatorname{rk} M = m > 0$.

Der Begriff der Ordnung von M verallgemeinert also den Begriff der Mächtigkeit von endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduln.

1.4 Ordnung von Untermoduln

Im Folgenden geht es um Beziehungen zwischen den Elementaridealen von M und denen von Untermoduln. Diese Beziehungen werden wir in Abschnitt 5 benötigen.

Lemma 1.11 *Seien R ein faktorieller Ring, $r \in R/R^*$ und I, J Ideale in R. Dann gelten folgende Gleichungen:*

$$\operatorname{ggT}(r \cdot I) = r \cdot \operatorname{ggT}(I) \tag{8}$$

$$\operatorname{ggT}(I \cdot J) = \operatorname{ggT}(I) \cdot \operatorname{ggT}(J) \tag{9}$$

[5] Verzichtet man in der Definition einer Gruppe auf die Existenz von Inversen, so erhält man die Definition eines Monoids. Vergleiche z. B. [1].

BEWEIS: Gleichung (8) ist elementar. Seien $d_I \in \mathrm{ggT}(I)$ und $d_J \in \mathrm{ggT}(J)$. Setze $I' := \{\frac{i}{d_I} | i \in I\}$ und analog $J' := \{\frac{j}{d_J} | j \in J\}$. Nun gilt $\mathrm{ggT}(I') = \mathrm{ggT}(J') = 1$ und Gleichung (9) für I und J folgt mit Gleichung (8) aus der Gleichung (9) für I' und J'. Es gelte also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathrm{ggT}(I) = \mathrm{ggT}(J) = 1$. Sei $p \in R$ ein Primelement. Dann gibt es Elemente $i \in I$ und $j \in J$, die nicht durch p teilbar sind. Daher ist auch $i \cdot j$ nicht durch p teilbar. Insgesamt ergibt sich $\mathrm{ggT}(I \cdot J) = 1$. □

Ab jetzt sei R ein faktorieller und noetherscher Ring.

Lemma 1.12 *Sei M ein R-Modul mit Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n$ und sei $N \subset M$ der von $x_2, \ldots, x_n$ erzeugte Untermodul. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$\Delta_k(N) \mid \Delta_k(M).$$

BEWEIS: Falls $k \geq n$, so gilt $\Delta_k(N) = 1 = \Delta_k(M)$.

Sei $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Setze $r := n - k$. $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ sei eine Präsentationsmatrix für M und B sei eine beliebige $r \times r$-Untermatrix von A, d. h. $B = (a_{i_\mu, j_\nu})_{\mu,\nu=1,\ldots,r}$ mit paarweise verschiedenen $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, m\}$ und paarweise verschiedenen Elementen $j_1, \ldots, j_r \in \{1, \ldots, n\}$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m \geq n$. (Fügt man Nullzeilen zu einer Präsentationsmatrix hinzu, so erhält man eine neue Präsentationsmatrix des gleichen Moduls.) Es genügt $\Delta_k(N) \mid \det B$ zu zeigen. $\delta \in R$ sei ein größter gemeinsamer Teiler der Elemente $a_{i_1,1}, \ldots, a_{i_r,1}$. Für $\mu \in \{1, \ldots, r\}$ definieren wir $a'_{i_\mu,1}$ durch $\delta \cdot a'_{i_\mu,1} = a_{i_\mu,1}$. Es gilt

$$a'_{i_1,1} \cdot a_{i_\mu,1} - a'_{i_\mu,1} \cdot a_{i_1,1} = 0 \text{ für } \mu \in \{1, \ldots, r\}. \tag{10}$$

Die $(r-1) \times (n-1)$-Matrix

$$B' := (a'_{i_1,1} \cdot a_{i_\mu,j} - a'_{i_\mu,1} \cdot a_{i_1,j})_{\substack{\mu=2,\ldots,r \\ j=2,\ldots,n}}$$

kann durch hinzufügen weiterer Zeilen zu einer Präsentationsmatrix von N fortgesetzt werden. Jede Zeile von B' ist eine Linearkombination der i_1-ten und i_μ-ten Zeile von A, wobei die wegen (10) an erster Stelle stehende Null weggelassen wurde. Daher repräsentiert jede Zeile von B' eine Relation zwischen den Erzeugern $x_2, \ldots, x_n$ von N. Wir setzen für $l \in \{1, \ldots, r\}$

$$B_l := \det \left((a'_{i_1,1} \cdot a_{i_\mu,j_\nu} - a'_{i_\mu,1} a_{i_1,j_\nu})_{\substack{\mu=2,\ldots,r \\ \nu=1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,r}} \right).$$

Für alle $l \in \{1, \ldots, r\}$ ist B_l eine Unterdeterminante der Ordnung $r-1$ einer Präsentationsmatrix von N mit $n-1$ Spalten. Für alle $l \in \{1, \ldots, r\}$ gilt also $\Delta_k(N) \mid B_l$, da B_l einer der Erzeuger von $E_k(N)$ ist.

Mit $B'' := (a'_{i_1,1} \cdot a_{i_\mu,j_\nu} - a'_{i_\mu,1} a_{i_1,j_\nu})_{\substack{\mu=2,\dots,r \\ \nu=1,\dots,r}}$ gilt

$$\begin{aligned}
a_{i_1,j_1}B_1 - \cdots + (-1)^{r-1} a_{i_1,j_r} B_r &= \det \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_r} \\ & B'' & \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_r} \\ a'_{i_1,1} \cdot a_{i_2,j_1} & \cdots & a'_{i_1,1} \cdot a_{i_2,j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i_1,1} \cdot a_{i_r,j_1} & \cdots & a'_{i_1,1} \cdot a_{i_r,j_r} \end{pmatrix} \\
&= (a'_{i_1,1})^{r-1} \cdot \det(B).
\end{aligned}$$

Folglich gilt $\Delta_k(N) \mid (a'_{i_1,1})^{r-1} \cdot \det(B)$.

Analog erhält man für $\mu = 1, \dots, r$

$$\Delta_k(N) \mid (a'_{i_\mu,1})^{r-1} \cdot \det(B), \tag{11}$$

wenn man von derjenigen Präsentationsmatrix für M ausgeht, die aus A durch Vertauschen der Zeilen 1 und i_μ entsteht.

Es gilt $\operatorname{ggT}(a'_{i_1,1}, \dots, a'_{i_r,1}) = 1$. Mit Gleichung (8) folgt daraus

$$\operatorname{ggT}((a'_{i_1,1})^{r-1} \cdot \det(B), \dots, (a'_{i_1,1})^{r-1} \cdot \det(B)) = \det(B).$$

Mit (11) erhalten wir nun $\Delta_k(N) \mid \det(B)$. □

Satz 1.13 *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$*

$$\Delta_i(N) \mid \Delta_i(M).$$

Beweis: Sei $i \in \mathbb{N}$. Sei $x_1, \dots, x_n$ ein Erzeugendensystem von M und $y_1, \dots, y_m$ eines von N. Für $j \in \{0, \dots, n\}$ bezeichne mit N_j den Untermodul von M, der von $x_{j+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ erzeugt wird. Nun ist $N = N_n \subset N_{n-1} \subset \cdots \subset N_0 = M$ eine Kette von Untermoduln mit der Eigenschaft, dass N_{j+1} als Untermodul von N_j entsteht durch Weglassen eines Erzeugers von N_j. Lemma 1.12 liefert nun $\Delta_i(N_{j+1}) \mid \Delta_i(N_j)$ für $j \in \{0, \dots, n-1\}$ und es folgt $\Delta_i(N) \mid \Delta_i(M)$. □

Lemma 1.14 *Sei N ein Untermodul des endlich erzeugten R-Moduls M. Dann gilt für alle $i, j \in \mathbb{N}$*

$$\Delta_{i+j}(M) \mid \Delta_i(N) \cdot \Delta_j(M/N).$$

Beweis: Sei $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem des Untermoduls N und $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$ eines von M. Es gibt eine Präsentationsmatrix von M der Form

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \tag{12}$$

wobei A eine Präsentationsmatrix von N ist. Begründung hierfür: Betrachte folgende Abbildungen.

$$\begin{aligned} \psi_N\colon R^n &\to N & e_i &\mapsto v_i \\ \psi_M\colon R^{n+m} &\to M & e_i &\mapsto \begin{cases} v_i & \text{falls } i \le n \\ w_{i-n} & \text{falls } i > n \end{cases} \end{aligned}$$

$\ker \psi_N$ und $\ker \psi_M$ sind endlich erzeugt, da R noethersch ist. Fassen wir R^n vermöge $R^n \hookrightarrow R^{n+m}$, $e_i \mapsto e_i$ als Untermodul von R^{n+m} auf, so gilt $\ker \psi_N \subset \ker \psi_M$. Sei $x_1, \ldots, x_r$ ein Erzeugendensystem von $\ker \psi_N$ und $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ eines von $\ker \psi_M$. Wir haben folgende endliche Präsentationen:

$$\begin{array}{ccccccc} R^r & \xrightarrow{A^T} & R^n & \xrightarrow{\psi_N} & N & \longrightarrow & 0 \\ e_i & \longmapsto & x_i & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} R^{r+s} & \xrightarrow{B^T} & R^{n+m} & \xrightarrow{\psi_M} & M & \longrightarrow & 0 \\ e_i & \longmapsto & \begin{cases} x_i & \text{falls } i \le r \\ y_{i-r} & \text{falls } i > r \end{cases} & & & & \end{array}$$

Für die so gewählten Präsentationsmatrizen A und B gilt nun

$$B^T = \begin{pmatrix} A^T & D \\ 0 & C^T \end{pmatrix}$$

mit $C \in Mat_R(s, m)$ und $D \in Mat_R(n, s)$. Wir setzen $C' := \begin{pmatrix} I & D \\ 0 & C^T \end{pmatrix}$ und $\psi_{M/N}\colon\ \mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{\psi_M} M \twoheadrightarrow M/N$. Dann ist zunächst

$$\begin{array}{ccccccc} R^{n+s} & \xrightarrow{C'} & R^{n+m} & \xrightarrow{\psi_{M/N}} & M/N & \longrightarrow & 0 \\ e_i & \longmapsto & \begin{cases} e_i & \text{falls } i \le n \\ y_{i-n} & \text{falls } i > n \end{cases} & & & & \end{array}$$

eine Präsentation von M/N und damit auch

$$\begin{array}{ccccccc} R^s & \xrightarrow{C^T} & R^m & \longrightarrow & M/N & \longrightarrow & 0\,. \\ & & e_i & \longmapsto & [w_i] & & \end{array}$$

C ist also eine Präsentationsmatrix von M/N. Das Produkt einer Unterdeterminante von A der Ordnung i mit einer Unterdeterminante von C der Ordnung j ist eine Unterdeterminante von B der Ordnung $i + j$. Es folgt $E_i(N) \cdot E_j(M/N) \subset E_{i+j}(M)$ und mit Gleichung (9) erhalten wir schließlich $\Delta_{i+j}(M) \mid \Delta_i(N) \cdot \Delta_j(M/N)$. $\square$

Definition 1.15 *Der Untermodul* $\operatorname{Tors}_R(M) := \{x \in M \mid \exists_{a \in R}\ ax = 0\}$ *des R-Moduls M heißt Torsionsmodul von M. Falls klar ist, welcher Ring R gemeint ist, schreibt man auch einfach* $\operatorname{Tors} M$*. Der Torsionsmodul ist genauso auch für beliebige Integritätsringe definiert.*

Lemma 1.16

$$\Delta_j(M) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } j < \operatorname{rk} M \\ \Delta_{j-\operatorname{rk} M}(\operatorname{Tors} M) & \textit{falls } j \geq \operatorname{rk} M \end{cases}$$

Beweis: Für einen Hauptidealring R folgt die Behauptung aus der Klassifikation der endlich erzeugten R-Moduln (vgl. (7)).

Sei R nun lediglich noethersch und faktoriell. Wir setzen $r := \operatorname{rk} M$. F sei ein von r linear unabhängigen Elementen erzeugter Untermodul von M und $x_1, \ldots, x_n$ sei ein Erzeugendensystem des Moduls M/F. Aus der Definition von F folgt, dass es $a_1, \ldots, a_n \in R \backslash \{0\}$ gibt, so dass $a_i x_i = 0$ in M/F für $i = 1, \ldots, n$. Seien $y_1, \ldots, y_n$ Urbilder von $x_1, \ldots, x_n$ unter der Abbildung $M \to M/F$.

Hilfsbehauptung: Aus $\operatorname{Tors} M = 0$ folgt $\Delta_r(M) = 1$.

Begründung: Sei M torsionsfrei. Die Abbildung

$$M \to F \qquad x \mapsto \left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right) \cdot x$$

ist ein injektiver Modulhomomorphismus. Es existiert also ein zu M isomorpher Untermodul des freien R-Moduls F vom Rang r. Aus $\Delta_r(F) = 1$ und Satz 1.13 folgt $\Delta_r(M) = 1$ und die Hilfsbehauptung ist bewiesen.

Sei M nun ein beliebiger, endlich erzeugter Modul über R und F wie oben. M' sei der Untermodul von M, der von F und $\operatorname{Tors} M$ erzeugt wird. Wir berechnen $\Delta_j(M')$ für $j \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\Delta_j(M') = \begin{cases} 0 & \text{falls } j < r \\ \Delta_{j-r}(\operatorname{Tors} M) & \text{falls } j \geq r \end{cases}. \tag{13}$$

Begründung: Sei $v_1, \ldots, v_r$ ein Erzeugendensystem von F und $w_1, \ldots, w_m$ eines von $\operatorname{Tors} M$. Für $\operatorname{Tors} M$ gibt es eine Präsentation der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} R^k & \xrightarrow{A^T} & R^m & \longrightarrow & \operatorname{Tors} M & \longrightarrow & 0 \\ & & e_i & \longmapsto & w_i & & \end{array}$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ und $A \in Mat_R(k, m)$. Für M' ergibt sich daraus die Präsentation

$$\begin{array}{ccccccc} R^k & \xrightarrow{\begin{pmatrix} A^T \\ 0 \end{pmatrix}} & R^{m+r} & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \\ & & e_i & \longmapsto & \begin{cases} w_i & \text{falls } i \leq m \\ v_{i-m} & \text{falls } i > m \end{cases} & & \end{array}$$

und es folgt (13).

Wir betrachten zunächst den Fall $j \geq r$. Da $M/\operatorname{Tors} M$ torsionsfrei ist, folgt mit der Hilfsbehauptung $\Delta_r(M/\operatorname{Tors} M) = 1$. Laut Lemma 1.14 gilt $\Delta_j(M) \mid \Delta_{j-r}(\operatorname{Tors} M) \cdot \Delta_r(M/\operatorname{Tors} M)$ und somit $\Delta_j(M) \mid \Delta_{j-r}(\operatorname{Tors} M)$. Andererseits gilt $\Delta_j(M') \mid \Delta_j(M)$. Mit (13) ergibt das insgesamt $\Delta_j(M) = \Delta_{j-r}(\operatorname{Tors} M)$.

Sei nun $j < r$. Aus $\Delta_j(M') \mid \Delta_j(M)$ und (13) folgt $\Delta_j(M) = 0$. $\square$

2 Definition der Alexanderpolynome

2.1 Verschlingungen

Definition 2.1 *Eine* ***Verschlingung*** ℓ *ist eine Einbettung*[6] *einer disjunkten Vereinigung endlich vieler Kreise* S^1 *in die 3-Sphäre* S^3*.*

Auch das Bild $\mathfrak{L} := \ell(S^1 \amalg \cdots \amalg S^1) \subset S^3$ *wird oft als Verschlingung bezeichnet. Eine Einbettung wird dann stillschweigend vorausgesetzt.*

Falls $\mathfrak{L}$ *zusammenhängend ist, heißt* $\mathfrak{L}$ *ein* ***Knoten****.*

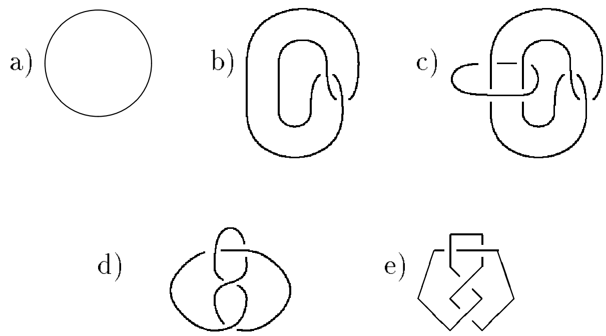


Abbildung 1: Beispiele für Knoten und Verschlingungen

Wir wollen nun definieren, wann zwei Verschlingungen als gleich angesehen werden sollen. Dazu definieren wir folgende Äquivalenzrelation:

Definition 2.2 *Zwei Einbettungen* $f_0, f_1 \colon X \to Y$ *sind* ***ambient isotop****, falls es einen Höhe erhaltenden Homöomorphismus*

$$\begin{array}{rccc} H: & Y \times I & \to & Y \times I \\ & (y,t) & \mapsto & (h_t(y), t) \end{array}$$

gibt, so dass $h_0 = id$ *und* $f_1 = h_1 \circ f_0$*.*

Die Abbildung H beschreibt eine Deformation von $f_0(X) \subset Y$ (samt Umgebung) in $f_1(X)$. In Abbildung 1 sind z. B. die Knoten d) und e) ambient isotop. Auch die Knoten a) und b) sind ambient isotop. Die Äquivalenzklasse von a) bezeichnet man als den trivialen Knoten.

Man darf eine Verschlingung ℓ auch als Einbettung in den $\mathbb{R}^3$ auffassen: Man wähle einen Punkt P im Komplement $S^3 \backslash \mathfrak{L}$ der Verschlingung[7] und einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus $S^3 \backslash \{P\} \to \mathbb{R}^3$.

[6] Eine Einbettung von X in Y ist eine Abbildung $f : X \to Y$, so dass $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus ist. Dabei sind X und Y topologische Räume.

[7] Gäbe es keinen solchen Punkt, so wäre $\ell : S^1 \amalg \cdots \amalg S^1 \to S^3$ ein Homöomorphismus. Widerspruch.

Definition 2.3 *Eine Verschlingung $\mathfrak{L} \subset \mathbb{R}^3$ heißt* ***polygonal****, falls jede Zusammenhangskomponente von $\mathfrak{L}$ ein endlicher Streckenzug ist.*

$\mathfrak{L}$ heißt ***zahm****, falls $\mathfrak{L} \subset \mathbb{R}^3$ zu einer polygonalen Verschlingung ambient isotop ist.*

In dieser Arbeit werden nur zahme Verschlingungen betrachtet.

Bemerkung 2.4 *$S^1 \amalg \cdots \amalg S^1$ besitzt eine Standardorientierung (entgegen dem Uhrzeigersinn). Der Homöomorphismus $S^1 \amalg \cdots \amalg S^1 \to \mathfrak{L}$ vererbt der Verschlingung $\mathfrak{L}$ eine* ***Orientierung****. Auf jeder Komponente von $\mathfrak{L}$ ist also eine Durchlaufrichtung ausgezeichnet.*

Bemerkung 2.5 *Die Zusammenhangskomponenten einer Verschlingung ℓ sind auf natürliche Weise* ***geordnet****. Wir nennen das Bild des i-ten Kreises in $S^1 \amalg \cdots \amalg S^1$ unter ℓ die i-te Komponente von ℓ.*

Wie in Abbildung 1 wird eine Verschlingung üblicherweise mit Hilfe einer regulären Projektion angegeben:

$$S^1 \amalg \cdots \amalg S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \overset{p}{\twoheadrightarrow} E \cong \mathbb{R}^2$$

p bezeichne die senkrechte Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf eine beliebige Ebene E durch den Ursprung.

Definition 2.6 *p heißt* ***reguläre Projektion*** *bzgl. $\mathfrak{L}$, falls es höchstens endlich viele 2-fache Punkte und keine k-fachen Punkte für $k > 2$ gibt und außerdem bei jedem 2-fachen Punkt ein transversaler Schnitt vorliegt.*

Ein Punkt $a \in p(\mathfrak{L})$ heißt k-fach, falls mindestens k verschiedene Punkte der Verschlingung auf a projiziert werden.

Handelt es sich bei $\mathfrak{L}$ um eine polygonale Verschlingung, so liegt bei einem 2-fachen Punkt a ein transversaler Schnitt vor, wenn keine Ecke von $\mathfrak{L}$ auf a projiziert wird.

Satz 2.7 *Sei $\mathfrak{L}$ eine polygonale Verschlingung. Die Menge der regulären Projektionen bzgl. $\mathfrak{L}$ ist dicht in $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$. Insbesondere gibt es zu $\mathfrak{L}$ eine reguläre Projektion.*

Zum Beweis vergleiche [12] Kapitel I, Abschnitt 3.

Sei $p : \mathbb{R}^3 \to E$ eine reguläre Projektion. Wir wählen eine der beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^3 \backslash E$ und bezeichnen sie als Halbraum über E. Dies nennen wir die Wahl einer **Blickrichtung** auf die Projektion p. Die Funktion

$$h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad v \mapsto \begin{cases} d(v, E) & \text{falls } v \text{ über } E \\ -d(v, E) & \text{falls } v \text{ unter } E \end{cases}$$

heißt die Höhenfunktion (bzgl. Projektion und Blickrichtung). Dabei bezeichnet d die euklidische Metrik des $\mathbb{R}^3$. Wir orientieren E so, dass eine positiv orientierte Basis von E gefolgt von einem Vektor, der in den Halbraum über E zeigt, eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^3$ ergibt.

Wir wollen noch klären, was eine Verschlingungsinvariante ist.

Unter einer **Verschlingungsinvariante** verstehen wir eine Zuordnung, die jeder Verschlingung ein mathematisches Objekt zuordnet, so dass ambient isotopen Verschlingungen das gleiche Objekt zugeordnet wird. Beachte, dass der orientierungserhaltende Homöomorphismus $h_1\colon S^3 \to S^3$ aus Definition 2.2 Ordnung und Orientierung respektiert.

2.2 Wirtingerpräsentation

Definition 2.8 *Die Fundamentalgruppe*[8] *des Komplements einer Verschlingung $\mathfrak{L}$ heißt die* ***Gruppe von $\mathfrak{L}$****.*

Beachte, dass $S^3 \backslash \mathfrak{L}$ wegzusammenhängend ist und somit die Fundamentalgruppen zu verschiedenen Basispunkten isomorph sind. Bislang haben wir nur den Isomorphietyp der Gruppe von $\mathfrak{L}$ festgelegt. Auch $\mathbb{R}^3 \backslash \mathfrak{L}$ ist wegzusammenhängend und es gilt $\pi_1(S^3 \backslash \mathfrak{L}) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash \mathfrak{L})$.

Seien ℓ_1 und ℓ_2 zwei ambient isotope Verschlingungen. Der Homöomorphismus $h_1\colon S^3 \to S^3$ aus Definition 2.2 liefert per Restriktion den Homöomorphismus $h_1|_{S^3\backslash\mathfrak{L}_1}\colon S^3\backslash\mathfrak{L}_1 \to S^3\backslash\mathfrak{L}_2$. Also sind die Gruppen ambient isotoper Verschlingungen isomorph. Die Isomorphieklasse der Gruppe einer Verschlingung ist demnach eine Verschlingungsinvariante.

Wir benötigen im Folgenden Präsentationen von Gruppen:

Seien I und J zwei Indexmengen. Die freie Gruppe[9] zur Basis $\{x_i\}_{i\in I}$ wird mit $\langle \{x_i\}_{i\in I} | \rangle$ bezeichnet. Für alle $j \in J$ sei $r_j \in \langle \{x_i\}_{i\in I} | \rangle$. Dann nennen wir

$$\langle \{x_i\}_{i\in I} | \{r_j\}_{j\in J} \rangle := \langle \{x_i\}_{i\in I} | \rangle \ / \ N(\{r_j\}_{j\in J})$$

die Gruppe mit den Erzeugern $\{x_i\}_{i\in I}$ und Relatoren $\{r_j\}_{j\in J}$. Dabei bezeichnet $N(\{r_j\}_{j\in J})$ den von $\{r_j\}_{j\in J}$ in $\langle \{x_i\}_{i\in I} | \rangle$ erzeugten Normalteiler. Man sagt $r \in \langle \{x_i\}_{i\in I} | \rangle$ ist eine Konsequenz von $\{r_j\}_{j\in J}$, falls $r \in N(\{r_j\}_{j\in J})$. Sind sowohl I als auch J endliche Mengen, so spricht man von einer endlichen Präsentation und schreibt $\langle x_1, \ldots x_m | r_1, \ldots, r_k \rangle$ falls $I = \{1, \ldots, m\}$ und $J = \{1, \ldots, k\}$.

Wir wollen nun für die Gruppe einer Verschlingung eine endliche Präsentation finden.

---

[8] Die Definition der Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes findet man z. B. in [12], [7], [5] oder [8].

[9] Zum Begriff der freien Gruppe vgl. [12] oder [8].

Sei $\mathfrak{L} \subset \mathbb{R}^3$ eine Verschlingung. Wähle eine reguläre Projektion p bzgl. $\mathfrak{L}$ und eine Blickrichtung auf p. Aus dem Bild der Projektion $p(\mathfrak{L}) \subset E$ von $\mathfrak{L}$ und der Information an jeder Kreuzung, welcher Bogen über dem anderen verläuft, kann man die **Wirtingerpräsentation** der Gruppe von $\mathfrak{L}$ ablesen:

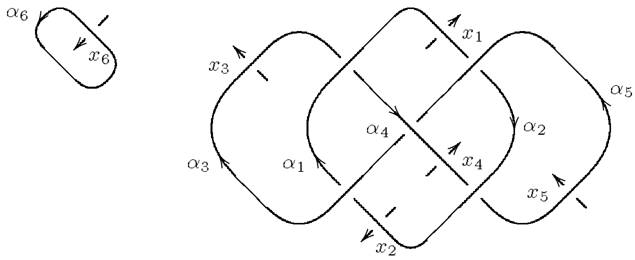


Abbildung 2: Erzeuger der Wirtingerpräsentation

Die Verschlingung $\mathfrak{L}$ kann wie in Abbildung 2 in endlich viele Bögen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ zerlegt werden. Wir beschriften zunächst die Bögen der Komponenten von $\mathfrak{L}$, die aus mehr als einem Bogen bestehen. Wir beginnen mit einem beliebigen Bogen einer solchen Komponente und indizieren sämtliche Bögen dieser Komponente in der Reihenfolge, in der sie durchlaufen werden. So verfahren wir nacheinander mit sämtlichen Komponenten von $\mathfrak{L}$.

Zeichne einen Pfeil x_i, der den Bogen α_i von rechts nach links unterkreuzt. Wähle einen Basispunkt P über der Verschlingung, so dass die geraden Verbindungen von P mit den Anfangs- und Endpunkten der Pfeile die Verschlingung nicht schneiden oder unterkreuzen. Betrachte nun zu α_i den geschlossenen Streckenzug c_i, der von P zum Anfangspunkt von x_i, von dort zur Spitze von x_i und dann zurück zu P führt. Die Homotopieklassen[10] von $c_1, \ldots, c_m$ bilden ein Erzeugendensystem von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash \mathfrak{L}, P)$.

An jeder Kreuzung von $p(\mathfrak{L})$ kann man eine Relation ablesen:

Sei n die Anzahl der Kreuzungen und $i \in \{1, \ldots, n\}$. Der Kreuzung am Ende des Bogens α_i wird zunächst ein Vorzeichen ε_i zugeordnet:

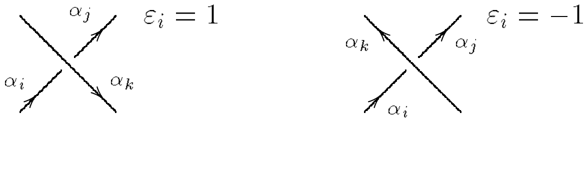


Abbildung 3: Vorzeichen einer Kreuzung

Im Fall $\varepsilon_i = 1$ ist der Weg[11] $c_i c_k c_j^{-1} c_k^{-1}$ nullhomotop in $\mathbb{R}^3 \backslash \mathfrak{L}$.

[10] Hier sind die Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation „homotop mit festem Basispunkt P" gemeint.

[11] Mit c^{-1} bezeichnen wir den rückwärts durchlaufenen Weg c und $c_i c_j c_k \cdots$ bezeichne den Weg, der entsteht, wenn die Wege $c_i, c_j, c_k, \ldots$ der Reihe nach durchlaufen werden.

Im Fall $\varepsilon_i = -1$ ist der Weg $c_j c_k c_i^{-1} c_k^{-1}$ nullhomotop in $\mathbb{R}^3 \backslash \mathfrak{L}$. Setze:

$$(14) \qquad r_i := \begin{cases} x_i x_k x_j^{-1} x_k^{-1} & \text{falls } \varepsilon_i = 1 \\ x_j x_k x_i^{-1} x_k^{-1} & \text{falls } \varepsilon_i = -1 \end{cases}$$

Satz und Definition 2.9

$$G_{\mathfrak{L}} \;:=\; \langle x_1, \ldots, x_m | r_1, \ldots, r_n \rangle \;\cong\; \pi_1(S^3 \backslash \mathfrak{L}, P)$$

Wir werden in Zukunft $G_{\mathfrak{L}}$ als Gruppe von $\mathfrak{L}$ (bzgl. regulärer Projektion und Blickrichtung) bezeichnen.

*Sei $n > 1$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist der Relator r_i eine Konsequenz der übrigen Relatoren $\{r_j\}_{\substack{j=1,\ldots,n \\ j \neq i}}$. Streicht man einen Relator der Wirtingerpräsentation $\langle x_1, \ldots, x_m | r_1, \ldots, r_n \rangle$, so nennt man die neue Präsentation eine **reduzierte Wirtingerpräsentation**.*

Ist $\mathfrak{L}$ ein Knoten mit mindestens einer Kreuzung (in der gewählten Projektion), so gilt $m = n$.

Zum Beweis vergleiche z. B. [12] oder [11].

Bei der Definition der Alexandermoduln werden Kommutatoruntergruppen von $G_{\mathfrak{L}}$ eine Rolle spielen.

Definition 2.10 *Sei G eine beliebige Gruppe. $[G, G]$ bezeichnet die von allen Elementen der Form $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ mit $x, y \in G$ erzeugte Untergruppe. Für $n \in \mathbb{N}$ wird $G^{(n)}$ induktiv definiert:*

$$\begin{aligned} G^{(0)} &:= G \\ G^{(n+1)} &:= [G^{(n)}, G^{(n)}] \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

*Statt $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$ schreiben wir auch G' bzw. G''. $G^{(n)}$ heißt n-te **Kommutatoruntergruppe** von G.*

Lemma 2.11 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $G^{(n)}$ Normalteiler in G.*

Beweis durch Induktion: Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig.

Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Seien $g \in G$, $x, y \in G^{(n)}$.

$$\begin{aligned} g[x, y]g^{-1} &= gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1} \\ &= [gxg^{-1}, gyg^{-1}] \in G^{(n+1)} \end{aligned}$$

Sei $h \in G^{(n+1)}$. Dann gibt es $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots y_k \in G^{(n)}$, so dass gilt $h = \prod_{i=1}^k [x_i, y_i]$. Für $g \in G$ folgt nun $ghg^{-1} = \prod_{i=1}^k g[x_i, y_i]g^{-1} \in G^{(n+1)}$. □

Definition 2.12 *Eine Gruppe G zu **abelianisieren**, heißt zur Restklassengruppe $Ab(G) := G/G'$ überzugehen:* $\quad ab\colon G \twoheadrightarrow Ab(G)$

Lemma 2.13 *$Ab(G)$ ist eine abelsche Gruppe.*

Jeder Homomorphismus $\varphi : G \to H$ in eine abelsche Gruppe H faktorisiert über $Ab(G)$, d. h. es gibt genau einen Homomorphismus $\overline{\varphi} : Ab(G) \to H$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "ab"'] & H \\ Ab(G) \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Der Beweis ist einfach. Vergleiche z. B. [1] Abschnitt 5.4.

Die Wirtingerpräsentation kann dazu benutzt werden, $H_1(S^3 \backslash \mathfrak{L})$ zu berechnen[12] :

Lemma 2.14 *Für einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X und $P \in X$ gilt*

$$Ab(\pi_1(X, P)) \cong H_1(X).$$

Der Isomorphismus $Ab(\pi_1(X, P)) \to H_1(X)$ ist dadurch gegeben, dass man geschlossene Wege mit Basispunkt P als 1-Simplizes auffasst. Homotope Wege entsprechen dabei homologen 1-Simplizes, denn die Homotopie zwischen zwei Wegen entspricht einem 2-Simplex, dessen Rand die Differenz der den Wegen entsprechenden 1-Simplizes ist. Wege aus $\pi_1(X, P)'$ entsprechen dem Element $0 \in H_1(X)$, da $H_1(X)$ eine abelsche Gruppe ist und bei der beschriebenen Abbildung die Verknüpfung von Wegen in die Addition von 1-Simplizes übergeht. Die Bijektivität der Abbildung folgt nun leicht (vgl. [5] Kapitel IV, Abschnitt 3). $\square$

In unserem konkreten Fall gilt also:

$$\begin{aligned} H_1(S^3 \backslash \mathfrak{L}) &\cong Ab(G_{\mathfrak{L}}) = Ab(\langle x_1, \ldots, x_m | r_1, \ldots, r_n \rangle) \\ &= \langle x_1, \ldots, x_m | \{xyx^{-1}y^{-1}\}_{x,y \in \langle x_1, \ldots, x_m | \rangle}, r_1, \ldots, r_n \rangle \end{aligned}$$

Im Fall $\varepsilon_i = 1$ kann hier $r_i = x_i x_k x_j^{-1} x_k^{-1}$ durch $\widetilde{r}_i := r_i x_k x_j x_k^{-1} x_j^{-1} = x_i x_j^{-1}$ ersetzt werden, ohne dadurch den von den Relatoren erzeugten Normalteiler zu ändern. Im Fall $\varepsilon_i = -1$ ersetzen wir den Relator $r_i = x_j x_k x_i^{-1} x_k^{-1}$ durch $\widetilde{r}_i := x_i x_k x_i^{-1} x_k^{-1} r_i^{-1} = x_i x_j^{-1}$.

Beachte, dass der Bogen α_j am Endpunkt von α_i beginnt. Falls zwei Bögen α_s, α_t zur selben Zusammenhangskomponente von $\mathfrak{L}$ gehören (schreibe $x_s \sim x_t$), ist $x_s x_t^{-1}$ eine Konsequenz von $\widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_n$. Somit gilt

[12] Für einen Ring R und einen topologischen Raum X bezeichnet $H_i(X; R)$ die i-te singuläre Homologiegruppe mit Koeffizienten in R. Im Fall $R = \mathbb{Z}$ schreibt man auch kurz $H_i(X)$. Zur Homologietheorie siehe z. B. [5] Kapitel IV.

Lemma 2.15

$$\begin{aligned} H_1(S^3\backslash\mathfrak{L}) &\cong Ab(G_{\mathfrak{L}}) \\ &= \langle x_1,\ldots,x_m \mid \{xyx^{-1}y^{-1}\}_{x,y\in\langle x_1,\ldots,x_m|\rangle}, x_ix_j^{-1} \text{ falls } x_i\sim x_j\rangle \\ &\cong \mathfrak{Z}^\kappa \cong \mathbb{Z}^\kappa \end{aligned}$$

wobei κ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\mathfrak{L}$ ist. $\mathfrak{Z}^\kappa$ bezeichnet die multiplikativ geschriebene, freie abelsche Gruppe mit Basis $t_1,\ldots,t_\kappa$:

$$\mathfrak{Z}^\kappa := \{t_1^{l_1}\cdots t_\kappa^{l_\kappa} \mid l_1,\ldots,l_\kappa\in\mathbb{Z}\}$$

Der Isomorphismus $Ab(G_{\mathfrak{L}})\cong\mathfrak{Z}^\kappa$ ist kanonisch gegeben: Sind $i_1,\ldots,i_\kappa\in\{1,\ldots,m\}$ so gewählt, dass der Bogen α_{i_j} zur j-ten Komponente von $\mathfrak{L}$ gehört, so ist

$$Ab(G_{\mathfrak{L}})\to\mathfrak{Z}^\kappa \qquad [x_{i_j}]\mapsto t_j$$

der gesuchte Isomorphismus, wobei $[*]$ die Äquivalenzklasse von $*$ in $Ab(G_{\mathfrak{L}})$ bezeichne.

2.3 Maximale abelsche Überlagerung

Die für das Verständnis dieser Arbeit notwendigen Kenntnisse der Überlagerungstheorie findet man z. B. in [7], [5] oder [6].

Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender topologischer Raum.

Ist $\mathfrak{L}$ eine Verschlingung, so erfüllt $\mathfrak{L}^c := S^3\backslash\mathfrak{L}$ diese Voraussetzungen: $\mathfrak{L}^c$ ist als Mannigfaltigkeit lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Mit Hilfe einer regulären Projektion sieht man, dass $\mathfrak{L}^c$ außerdem wegzusammenhängend ist.

Sei $x\in X$. Setze $G := \pi_1(X,x)$. Aus den Resultaten der Überlagerungstheorie folgt:

Satz 2.16 *Zur Untergruppe G' von G gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Überlagerung $p:\widehat{X}\to X$, so dass das Bild des von p induzierten injektiven Homomorphismus $\pi_1(p):\pi_1(\widehat{X},\widehat{x})\to G$ gleich G' ist. Dabei ist $\widehat{x}\in p^{-1}(x)$ beliebig.*

Es gilt $\widehat{X}\cong\widetilde{X}/G'$, wobei $\widetilde{X}$ hier die universelle Überlagerung von X bezeichnet.

Die Gruppe der Deckbewegungen $\mathcal{D}_{\widehat{X}}\cong G/G'$ operiert frei[13] und transitiv[14] auf $\widehat{X}$.

Für jede Überlagerung $p:Y\to X$ gilt, dass $\mathcal{D}_Y$ frei auf Y operiert.

[13]frei bedeutet in diesem Zusammenhang: falls eine Deckbewegung einen Fixpunkt hat, ist es die Identität

[14]transitiv bedeutet hier: zu je zwei Punkten über $x\in X$ existiert eine Deckbewegung, die den einen Punkt in den anderen abbildet

Definition 2.17 *Eine Überlagerung $p : Y \to X$ heißt normal, falls* $\mathrm{im}(\pi_1(p))$ *ein Normalteiler in $\pi_1(X)$ ist.*

Eine Überlagerung $p : Y \to X$ ist normal genau dann, wenn $\mathcal{D}_Y$ transitiv auf Y operiert. Für normale Überlagerungen gilt $\mathcal{D}_Y \cong \pi_1(X)/\pi_1(p)(\pi_1(Y))$.

Definition 2.18 *Man nennt $\widehat{X}$ die* ***maximale abelsche Überlagerung*** *von X. Falls $\mathfrak{L}$ ein Knoten ist, heißt $\widehat{\mathfrak{L}^c}$ auch* ***unendlich zyklische Überlagerung*** *von $\mathfrak{L}^c$.*

Die Namen von $\widehat{X}$ beziehen sich auf die Eigenschaften der Gruppe der Deckbewegungen.

2.4 Gruppenringe

Sei G eine multiplikativ geschriebene Gruppe und $e \in G$ das neutrale Element.

Definition 2.19 *$\mathbb{Z}[G]$ bezeichnet den* ***Gruppenring*** *von G mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Die Elemente von $\mathbb{Z}[G]$ sind alle formalen Linearkombinationen von Elementen aus G mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$:*

$$\mathbb{Z}[G] := \left\{ \sum_{g \in G} n_g g \,\middle|\, n_g \in \mathbb{Z} \text{ für alle } g \in G, n_g \neq 0 \text{ nur für endl. viele } g \in G \right\}$$

Die Addition erfolgt koeffizientenweise:

$$\left(\sum_{g \in G} n_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} m_g g \right) := \sum_{g \in G} (n_g + m_g)\, g$$

Die Multiplikation ist wie folgt definiert:

$$\left(\sum_{g \in G} n_g g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} m_h h \right) := \sum_{g,h \in G} (n_g m_h)(gh) \overset{\overline{g}=gh}{=} \sum_{\overline{g} \in G} \left(\sum_{h \in G} n_{(\overline{g}h^{-1})} m_h \right) \overline{g}$$

Mit diesen Operationen versehen ist $\mathbb{Z}[G]$ ein Ring mit Einselement $1 \cdot e$. $\mathbb{Z}[G]$ ist kommutativ genau dann, wenn G kommutativ ist. Sind G und G' isomorph, so sind auch $\mathbb{Z}[G]$ und $\mathbb{Z}[G']$ isomorph. Durch $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G], n \mapsto ne$ und $G \to \mathbb{Z}[G], g \mapsto 1g$ sind kanonische Inklusionen von $\mathbb{Z}$ und G in den Gruppenring gegeben.

Lemma 2.20 *Sei R ein Ring und $\varphi : G \to R$ eine produkterhaltende Abbildung. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung zu einem Ringhomomorphismus $\overline{\varphi} : \mathbb{Z}[G] \to R$.*

BEWEIS: Setze $\overline{\varphi}(0) := 0$. Sei $f \in \mathbb{Z}[G]$. f besitzt eine eindeutige Darstellung $f = n_1 g_1 + \cdots + n_k g_k$ mit $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und paarweise verschiedenen Elementen $g_1, \ldots, g_k \in G$. Setze $\overline{\varphi}(f) := n_1\varphi(g_1) + \cdots + n_k\varphi(g_k)$. Da $\overline{\varphi}$ insbesondere ein Homomorphismus abelscher Gruppen sein soll, können wir $\overline{\varphi}(f)$ nur so erklären. Somit folgt die Eindeutigkeit. Mit den Distributivgesetzen in R und $\mathbb{Z}[G]$ und der Produkttreue von φ folgt die Produkttreue von $\overline{\varphi}$. □

Im Folgenden wird der Gruppenring von $\mathfrak{Z}^n$ etwas genauer untersucht.

In natürlicher Weise ist der Polynomring $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ von $\mathbb{Z}$ in n Variablen ein Unterring von $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$. Wir definieren eine produkterhaltende Abbildung

$$(15) \qquad \sharp: \quad \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n] \to \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n] \qquad a \mapsto \sharp a.$$

Sei $a \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$. Es gibt eindeutig bestimmte ganze Zahlen $m, k_1, \ldots, k_m, l_{11}, \ldots, l_{nm} \in \mathbb{Z}, k_i \neq 0$ mit $a = \sum_{i=1}^m k_i t_1^{l_{1i}} \cdots t_n^{l_{ni}}$. Setze $l_j := \min_{i\in\{1,\ldots,m\}} l_{ji}$ und $\sharp a := a \cdot t_1^{-l_1} \cdots t_n^{-l_n}$. Dann gilt $\sharp a \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ und $\sharp\sharp a = \sharp a$ für alle $a \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$. Der Nachweis, dass $\sharp$ produkterhaltend[15] ist, ist elementar.

Lemma 2.21 *Für die Gruppe $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]^*$ der Einheiten von $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$ gilt:*

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]^* = \pm\mathfrak{Z}^n = \left\{\varepsilon \cdot t_1^{l_1} \cdots t_n^{l_n} | \varepsilon \in \{\pm 1\}, l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{Z}\right\}$$

BEWEIS: Offensichtlich gilt $\pm\mathfrak{Z}^n \subset \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]^*$.

Sei nun $a \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]^*$. Dann folgt $\sharp a \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]^* \cap \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$. b bezeichne das Inverse von $\sharp a$ in $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$. Dann gilt $\sharp a \cdot \sharp b = \sharp\sharp a \cdot \sharp b = \sharp(\sharp a \cdot b) = \sharp 1 = 1$. Also gilt $\sharp a \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]^* = \mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$. □

Lemma 2.22 $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$ *ist ein faktorieller Ring.*

BEWEIS: 1.Schritt: Sei $q \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ irreduzibel, $q \notin \{t_1, \ldots, t_n\}$. Dann ist q irreduzibel in $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$. Begründung: q ist keine Einheit in $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$ und $q \neq 0$. Seien $a, b \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]$ mit $q = a \cdot b$. Da q in $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ irreduzibel ist, gilt $q = \sharp q = \sharp a \cdot \sharp b$ und es folgt $\sharp a \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]^*$ oder $\sharp b \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]^*$. Also gilt $a \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]^*$ oder $b \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]^*$.

2.Schritt: Sei $a \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]\backslash\{0\}$. Nun liefert eine Zerlegung in irreduzible Faktoren von $\sharp a$ in $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ eine Zerlegung von a in $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$: Sei $\sharp a = q_1 \cdots q_r$ mit $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ irreduzibel. Dann gilt $a = \frac{a}{\sharp a} q_1 \cdots q_r$, wobei $\frac{a}{\sharp a} \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]^*$.

Sei $a = p_1 \cdots p_s$ eine weitere Zerlegung von a in irreduzible Faktoren. Dann gilt $\sharp a = \sharp p_1 \cdots \sharp p_s$. Die Eindeutigkeit der Zerlegung in $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ (bis auf Umordnen der Faktoren und Multiplikation mit Einheiten) liefert nun die Eindeutigkeit der Zerlegung in $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$. □

[15] Es besteht kein Zusammenhang mit Lemma 2.20. $\sharp$ ist nicht additiv, also kein Ringhomomorphismus.

Lemma 2.23 $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$ *ist ein noetherscher Ring.*

Beweis: $\mathbb{Z}$ ist noethersch. Laut Hilbertschem Basissatz (vgl. [3] oder [2] Satz 3.29) ist dann auch $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ noethersch. Sei nun $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots$ eine aufsteigende Kette von Idealen in $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$. Setze $\mathfrak{b}_i := \mathfrak{a}_i \cap \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$. Dann ist $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \cdots$ eine aufsteigende Kette von Idealen in $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$. Man gewinnt $\mathfrak{a}_i$ aus $\mathfrak{b}_i$ durch Multiplikation mit Elementen aus $\mathfrak{Z}^n$ zurück:

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{Z}^n \cdot \mathfrak{b}_i \tag{16}$$

Die Kette $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \cdots$ wird stationär, d. h. es existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_m$ für alle $i \geq m$. Wegen (16) wird auch die Kette $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots$ stationär. □

2.5 Alexandermoduln

Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender topologischer Raum. Sei $x \in X$ und $G := \pi_1(X, x)$. Wir betrachten eine normale Überlagerung $Y \to X$.

Wir werden feststellen, dass $H_i(Y)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ein $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_Y]$-Modul ist. Außerdem sehen wir, dass G'/G'' ein $\mathbb{Z}[G/G']$-Modul ist.

Wir erklären zunächst eine Skalarmultiplikation von $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_Y]$ auf $H_i(Y)$. Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_Y$. $\alpha\colon Y \to Y$ ist ein Homöomorphismus und induziert als solcher für alle $i \in \mathbb{N}$ einen Automorphismus $\alpha_i\colon H_i(Y) \to H_i(Y)$ von Gruppen. Es gilt $(\alpha \circ \beta)_i = \alpha_i \circ \beta_i$.

Definition 2.24 *Seien* $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$, $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)} \in \mathcal{D}_Y$ *und* $v \in H_i(Y)$. *Setze:*

$$\left(\sum_{j=1}^{k} n_j \alpha^{(j)}\right) \cdot v := \sum_{j=1}^{k} n_j \alpha_i^{(j)}(v)$$

Satz 2.25 $H_i(Y)$ *ist ein Modul über dem Ring* $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_Y]$.

Beweis: Die Axiome der Skalarmultiplikation sind nachzuprüfen. □

Wir betrachten nun den speziellen Fall der maximalen abelschen Überlagerung.

Zunächst werden wir die Isomorphie von $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widehat{X}}]$ und $\mathbb{Z}[G/G']$ erläutern:

Da G' ein Normalteiler in G ist, gilt:

Lemma 2.26

$$\mathcal{D}_{\widehat{X}} \cong G/G'$$

Der Isomorphismus $G/G' \to \mathcal{D}_{\widehat{X}}$ ist wie folgt gegeben: Wähle einen Punkt $\widehat{x} \in \widehat{X}$ über x, d. h. $\widehat{x}$ wird von der Überlagerung $\widehat{X} \to X$ auf x abgebildet. Sei c ein geschlossener Weg in X mit Basispunkt x. Dann lässt sich c eindeutig nach $\widehat{X}$ zu einem Weg $\widehat{c}$ mit Anfangspunkt $\widehat{x}$ hochheben. Es gibt nun genau eine Deckbewegung, die den Anfangspunkt von $\widehat{c}$ auf den Endpunkt von $\widehat{c}$ abbildet. Homotope Wege in X ergeben beim Hochheben zu Wegen in $\widehat{X}$ mit Anfangspunkt $\widehat{x}$ Wege mit dem selben Endpunkt, also die gleiche Deckbewegung. Repräsentiert c ein Element aus G', so ist $\widehat{c}$ geschlossen und die zugeordnete Deckbewegung ist die Identität auf $\widehat{X}$. Somit ist eine Abbildung $G/G' \to \mathcal{D}_{\widehat{X}}$ erklärt. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus (vgl. Literatur zur Überlagerungstheorie). □

Lemma 2.27 *Sei M ein R-Modul und $\varphi : \widetilde{R} \to R$ ein Ringhomomorphismus. Dann induziert φ auf M eine $\widetilde{R}$-Modulstruktur: Sei $\widetilde{r} \in \widetilde{R}$, $m \in M$.*

$$\widetilde{r} \cdot m := \varphi(\widetilde{r}) \cdot m$$

Beweis: Die Axiome der Skalarmultiplikation übertragen sich direkt von $R \times M \to M$ auf $\widetilde{R} \times M \to M$. □

Wir wenden Lemma 2.27 auf den im Anschluss an Lemma 2.26 beschriebenen Ringisomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}[G/G'] \to \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widehat{X}}]$ an und erhalten, dass $H_i(\widehat{X})$ ein $\mathbb{Z}[G/G']$-Modul ist.

Lemma 2.28 *Sei M ein R-Modul und $\psi : \widetilde{M} \to M$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen. Dann induziert ψ auf $\widetilde{M}$ eine R-Modulstruktur:*

Sei $r \in R$, $\widetilde{m} \in \widetilde{M}$.

$$r \cdot \widetilde{m} := \psi^{-1}(r \cdot \psi(\widetilde{m}))$$

ψ wird zu einem Modulisomorphismus.

Beweis: Die Axiome der Skalarmultiplikation übertragen sich direkt von $R \times M \to M$ auf $R \times \widetilde{M} \to \widetilde{M}$.

Seien $r_1, r_2 \in R$ und $\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2 \in \widetilde{M}$. Es gilt:
$\psi(r_1\widetilde{m}_1 + r_2\widetilde{m}_2) = \psi(\psi^{-1}(r_1\psi(\widetilde{m}_1)) + \psi^{-1}(r_2\psi(\widetilde{m}_2))) = r_1\psi(\widetilde{m}_1) + r_2\psi(\widetilde{m}_2)$
Also ist ψ ein Modulhomomorphismus. □

Da $\widehat{X}$ wegzusammenhängend ist, gilt laut Lemma 2.14:

$$G'/G'' = Ab(G') \cong Ab(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x})) \cong H_1(\widehat{X}) \tag{17}$$

wobei $\widehat{x} \in \widehat{X}$ ein beliebiger Punkt über x ist. Der Isomorphismus $Ab(G') \cong Ab(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}))$ wird dabei von dem in Satz 2.16 beschriebenen Isomorphismus $\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}) \to G'$ induziert.

Wendet man nun Lemma 2.28 an, so erhält man folgenden

Satz 2.29 *G'/G'' ist ein $\mathbb{Z}[G/G']$-Modul.*

Wie sieht nun die Skalarmultiplikation $\mathbb{Z}[G/G'] \times G'/G'' \to G'/G''$ aus?

Lemma 2.30 *Für $g \in G$ und $g' \in G'$ gilt*

$$[g] \cdot [\![g']\!] = [\![gg'g^{-1}]\!]$$

wobei $[*]$ die Äquivalenzklasse von $*$ in G/G' und $[\![*]\!]$ die Äquivalenzklasse von $*$ in G'/G'' bezeichnet, sofern dies Sinn macht.

Beweis: Seien γ und c geschlossene Wege mit Basispunkt $x \in X$, die g bzw. g' repräsentieren. Wir wählen einen Basispunkt $\widehat{x} \in \widehat{X}$ über x. Da c in G ein Element aus G' repräsentiert, gilt: Hebt man c nach $\widehat{X}$ zu einem Weg $\widehat{c}$ mit Basispunkt $\widehat{x}$ hoch, so ist auch $\widehat{c}$ geschlossen.

Den Modulisomorphismus $G'/G'' \to H_1(\widehat{X})$ aus (17) bezeichnen wir mit ψ. Unter ψ entspricht dem Element $[\![c]\!] \in G'/G''$ das Element σ_c, das von $\widehat{c}$ repräsentiert wird, d. h. $\psi([\![c]\!]) = \sigma_c$. Laut Lemma 2.28 gilt daher $[\gamma] \cdot [\![c]\!] = \psi^{-1}([\gamma] \cdot \sigma_c)$.

Unter dem Ringisomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}[G/G'] \to \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widehat{X}}]$ entspricht dem Element $[\gamma] \in G/G'$ die eindeutig bestimmte Deckbewegung $\beta_\gamma : \widehat{X} \to \widehat{X}$, die $\widehat{x}$ auf den Endpunkt $\widehat{y} \in \widehat{X}$ der Hochhebung von γ zum Anfangspunkt $\widehat{x}$ abbildet, d. h. $\varphi([\gamma]) = \beta_\gamma$. Laut Lemma 2.27 gilt daher $[\gamma] \cdot \sigma_c = \beta_\gamma \cdot \sigma_c$.

$\beta_\gamma \cdot \sigma_c \in H_1(\widehat{X})$ wird von dem geschlossenen Weg $\beta_\gamma \circ \widehat{c}$ repräsentiert. $\beta_\gamma \circ \widehat{c}$ ist die Hochhebung von c zum Anfangspunkt $\widehat{y}$. Die Hochhebung $\widehat{\gamma c \gamma^{-1}}$ von $\gamma c \gamma^{-1}$ zum Anfangspunkt $\widehat{x}$ und $\beta_\gamma \circ \widehat{c}$ repräsentieren das gleiche Element $\tau = \beta_\gamma \cdot \sigma_c \in H_1(\widehat{X})$. Es gilt $\widehat{\gamma c \gamma^{-1}} = \widehat{\gamma}(\beta_\gamma \circ \widehat{c})\widehat{\gamma}^{-1}$.

Insgesamt gilt $[\gamma] \cdot [\![c]\!] = \psi^{-1}([\gamma] \cdot \sigma_c) = \psi^{-1}(\tau) = [\![\gamma c \gamma^{-1}]\!]$. □

Sei jetzt $\mathfrak{L}$ eine Verschlingung mit κ Zusammenhangskomponenten.

Lemma 2.31 *$H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c})$ und $G'_{\mathfrak{L}}/G''_{\mathfrak{L}}$ sind als $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]$-Moduln isomorph.*

Beweis: Wir können $\mathcal{D}_{\widehat{\mathfrak{L}^c}}$ und $G_{\mathfrak{L}}/G'_{\mathfrak{L}}$ mit $\mathfrak{Z}^\kappa$ identifizieren und erhalten mit Lemma 2.27 und Lemma 2.28 die Behauptung aus (17). □

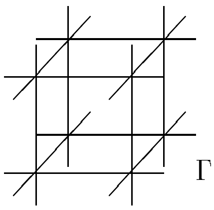
Definition 2.32 *Der $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]$-Modul $H_i(\widehat{\mathfrak{L}^c})$ heißt der i-te* ***Alexandermodul*** *von $\mathfrak{L}$. Der erste Alexandermodul heißt auch einfach Alexandermodul.*

Satz 2.33 *Der Alexandermodul von $\mathfrak{L}$ ist endlich erzeugt.*

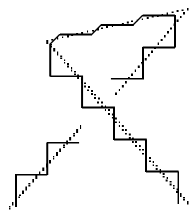
Beweis: Da wir nur zahme Verschlingungen betrachten, können wir gleich annehmen, dass $\mathfrak{L} \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3$ polygonal ist.

Sei $\delta > 0$ klein im Vergleich zu den Abständen zwischen nicht benachbarten Kanten von $\mathfrak{L}$. Betrachte folgendes Gitter:

$$\Gamma_\delta := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} \text{mindestens zwei der Koordinaten} \\ \text{sind ganzzahlige Vielfache von } \delta \end{matrix} \right\}$$



Γ_δ



Approximation von $\mathfrak{L}$ durch $\mathfrak{L}'$

Wir können nun $\mathfrak{L} \subset \mathbb{R}^3$ durch eine auf dem Gitter verlaufende Verschlingung $\mathfrak{L}' \subset \Gamma_\delta$ approximieren, so dass die beiden Verschlingungen ambient isotop sind. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathfrak{L} \subset \Gamma_\delta$ für ein $\delta > 0$.

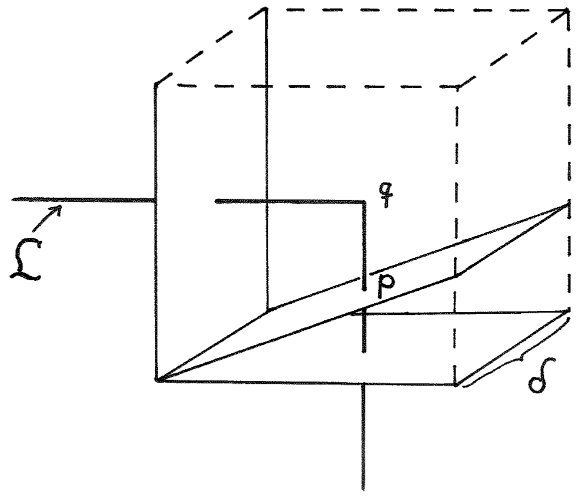
Wir definieren jetzt eine Tubenumgebung $|T|$ von $\mathfrak{L}$. Q bezeichne die Menge aller abgeschlossenen Würfel mit Kantenlänge $\frac{\delta}{2}$, in die $\mathbb{R}^3$ durch das Gitter $\Gamma_{\frac{\delta}{2}}$ „zerlegt" wird. Definiere nun:

$$T := \{q \in Q \mid q \cap \mathfrak{L} \neq \emptyset\} \qquad\qquad |T| := \bigcup_{q \in T} q$$

T ist die Menge aller Würfel, von denen eine Kante in $\mathfrak{L}$ liegt. Wir wollen δ so klein wählen, dass $|T|$ homöomorph zur disjunkten Vereinigung von κ Volltori ist. Es gilt nun: $\overline{S^3 \setminus |T|}$ ist ein starkes Deformationsretrakt von $S^3 \setminus \mathfrak{L}$.

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt ein **starkes Deformationsretrakt** von X, falls es eine stetige Abbildung $F\colon X \times [0,1] \to X$ gibt, so dass $F(x,0) = x$ und $F(x,1) \in A$ für alle $x \in X$ und $F(a,t) = a$ für alle $a \in A$ und $t \in [0,1]$.

Die oben behauptete Deformationsretraktion ist wie folgt gegeben: $|T|$ ist ein „Bündel" von rechteckigen Flächen über $\mathfrak{L}$. Sei $p \in \mathfrak{L}$. Falls p mindestens $\frac{\delta}{2}$ von allen Eckpunkten von $\mathfrak{L}$ entfernt ist, so nehmen wir als Fläche das Quadrat mit Seitenlänge δ und Mittelpunkt p, welches $\mathfrak{L}$ in p senkrecht schneidet. Liegt p in der Nähe einer Ecke q, so verfahren wir wie folgt: Wir betrachten den in Richtung des Gitters ausgerichteten Würfel der Kantenlänge δ mit Mittelpunkt q. Die Quadrate zu den beiden Punkten der Verschlingung mit Abstand $\frac{\delta}{2}$ von der Ecke q schneiden sich in einer Kante des betrachteten Würfels. Diese Kante und der Punkt p spannen eine Ebene



auf. Den Schnitt dieser Ebene mit dem betrachteten Würfel nehmen wir als Rechteck für p.

Sei nun $p \in \mathfrak{L}$ beliebig. Das Rechteck zu p bezeichnen wir mit E_p. Der Rand von E_p ist ein starkes Deformationsretrakt von $E_p \backslash \{p\}$. Eine Deformationsretraktion $F_p \colon E_p \backslash \{p\} \times [0,1] \to E_p \backslash \{p\}$ ist gegeben dadurch, dass sich jeder Punkt in $E_p \backslash \{p\}$ im Zeitintervall $[0,1]$ mit konstanter Geschwindigkeit radial nach außen bewegt, so dass er am Ende des Zeitintervalls auf dem Rand von E_p ankommt. Die einzelnen Abbildungen F_p fügen sich nun zu einer starken Deformationsretraktion $S^3 \backslash \mathfrak{L} \times [0,1] \to S^3 \backslash \mathfrak{L}$ zusammen.

Falls A ein (starkes) Deformationsretrakt von X ist, so sind A und X homotopieäquivalente topologische Räume. Sind zwei wegzusammenhängende Räume homotopieäquivalent, so sind ihre Fundamentalgruppen isomorph.

Setze $V := \overline{S^3 \backslash |T|}$. In unserem Fall folgt nun

$$H_1(\widehat{V}) \cong \pi_1(V)'/\pi_1(V)'' \cong G'_{\mathfrak{L}}/G''_{\mathfrak{L}} \cong H_1(\widehat{S^3 \backslash \mathfrak{L}})$$

wobei Isomorphie von $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]$-Moduln gemeint ist.

Es genügt also zu zeigen, dass $H_1(\widehat{V})$ endlich erzeugt ist.

$\overline{\mathbb{R}^3 \backslash |T|}$ besitzt die Struktur eines CW-Komplexes. Die Würfel aus $Q \backslash T$ sind die 3-Zellen, deren Ecken, Kanten und Flächen die Zellen der Dimensionen 0, 1 bzw. 2.

$|T|$ ist kompakt, d. h. T ist eine endliche Menge, deshalb gibt es eine endliche Menge $W \subset Q$, so dass $|W| := \bigcup_{q \in W} q$ ein großer Würfel ist, der $|T|$ enthält. Jetzt haben wir für V die Struktur eines endlichen CW-Komplexes. Wir nehmen nur die Würfel aus $W \backslash T$ und deren Ecken, Kanten und Flächen und eine weitere 3-Zelle für $\overline{S^3 \backslash |W|}$. Dies ist möglich, da $\overline{S^3 \backslash |W|}$ homöomorph zu einem abgeschlossenen 3-dimensionalen Ball ist.

Für einen endlichen CW-Komplex K gilt: Die freie abelsche Gruppe

$C_i(K)$ mit der Menge der i-Zellen als Basis ist die i-te Gruppe des zellulären Kettenkomplexes von K, mit dessen Hilfe man die Homologie von K ausrechnet. Konkret gilt nun, dass $C_i(V)$ endlich erzeugt ist. $\widehat{V}$ erbt als Überlagerung die Struktur eines CW-Komplexes von V. Da es sich um eine normale Überlagerung handelt, operiert $\mathcal{D}_{\widehat{V}} \cong \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]$ frei und transitiv auf $\widehat{V}$. Daher ist $C_i(\widehat{V})$, die i-te Gruppe des zellulären Kettenkomplexes von $\widehat{V}$, ein freier, endlich erzeugter $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]$-Modul (also noethersch). Also ist auch der Untermodul $\ker\left(C_i(\widehat{V}) \to C_{i-1}(\widehat{V})\right)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]$-Modul. Schließlich ist dann auch der Quotient

$$H_1(\widehat{S^3\backslash\mathfrak{L}}) \cong H_1(\widehat{V}) \cong \frac{\ker\left(C_1(\widehat{V}) \to C_0(\widehat{V})\right)}{\operatorname{im}\left(C_2(\widehat{V}) \to C_1(\widehat{V})\right)}$$

ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]$-Modul. □

Bemerkung 2.34 *Da $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$ ein noetherscher Ring ist und der Alexandermodul $H_1(\widehat{S^3\backslash\mathfrak{L}})$ einer Verschlingung laut Satz 2.33 endlich erzeugt ist, existiert laut Lemma 1.4 für $H_1(\widehat{S^3\backslash\mathfrak{L}})$ eine endliche Präsentation.*

2.6 Alexanderpolynome

Nun kommen die in Abschnitt 1 definierten Invarianten ins Spiel.

Definition 2.35 *Sei $\mathfrak{L}$ eine Verschlingung mit κ Zusammenhangskomponenten und sei $k \in \mathbb{N}$.*

$$\Delta_k(\mathfrak{L}) := \Delta_k(H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c})) \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]/\pm\mathfrak{Z}^\kappa$$

*heißt das k-te **Alexanderpolynom** von $\mathfrak{L}$. Das 0-te Alexanderpolynom wird oft einfach als das Alexanderpolynom von $\mathfrak{L}$ bezeichnet.*

Beispiel: Sei $\mathfrak{L}$ der triviale Knoten. Dann gilt $G_\mathfrak{L} \cong \mathbb{Z}$ und somit $G'_\mathfrak{L}/G''_\mathfrak{L} = 0$. Wir haben folgende Präsentation:

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}] \xrightarrow{id} \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}] \longrightarrow G'_\mathfrak{L}/G''_\mathfrak{L} \longrightarrow 0$$

Es folgt $\Delta_k(\mathfrak{L}) = 1$ für $k \in \mathbb{N}$. □

Betrachte den Homomorphismus $\chi : \mathfrak{Z}^\kappa \to \mathfrak{Z}, t_i \mapsto t$. χ induziert laut Lemma 2.20 einen Homomorphismus $\chi : \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa] \to \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]$. Wegen $\chi(\pm\mathfrak{Z}^\kappa) = \pm\mathfrak{Z}$ induziert χ außerdem einen Homomorphismus von kommutativen Monoiden

$$\chi : \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]/\pm\mathfrak{Z}^\kappa \to \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]/\pm\mathfrak{Z}.$$

Definition 2.36 $\widetilde{\Delta}_k(\mathfrak{L}) := \chi(\Delta_k(\mathfrak{L}))$ *heißt das k-te **reduzierte Alexanderpolynom** von $\mathfrak{L}$.*

Bemerkung 2.37 1. *Da der Isomorphietyp des Alexandermoduls eine Verschlingungsinvariante ist, sind auch alle oben definierten Alexanderpolynome Verschlingungsinvarianten.*

2. *Ändern wir die Ordnung einer Verschlingung* ℓ *(indem wir eine Permutation* $\sigma\colon S^1 \amalg \cdots \amalg S^1 \to S^1 \amalg \cdots \amalg S^1$ *der Faktoren* S^1 *vorschalten), so entspricht dies einer Permutation der Variablen* $t_1, \ldots, t_\kappa$*. Die Alexanderpolynome mehrkomponentiger Verschlingungen ändern sich also im Allgemeinen bei Umordnung. Die reduzierten Alexanderpolynome sind dagegen invariant unter Umordnung.*

3 Präsentationsmatrix von Reidemeister und de Rham

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf Knoten. Die Präsentationsmatrix des Alexandermoduls, zu der wir in diesem Abschnitt kommen werden, taucht - allerdings nicht als Präsentationsmatrix eines Moduls - schon 1932 bei K. Reidemeister auf (vgl. [20]). Wir gehen den Weg von G. de Rham (vgl. [21]), um diese Matrix zu erhalten.

Sei $\mathfrak{L}$ ein Knoten, es seien eine reguläre Projektion bzgl. $\mathfrak{L}$ und eine Blickrichtung ausgewählt. Für $G_{\mathfrak{L}}$ haben wir die Wirtingerpräsentation $\langle x_1, \ldots, x_m \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$.

3.1 Homomorphismen von $G_{\mathfrak{L}}$ nach $GA(\mathbb{C})$

Definition 3.1 *$GA(\mathbb{C})$ bezeichne die Gruppe der bijektiven affinen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$: $GA(\mathbb{C})$ ist die Menge der Abbildungen*

$$(\xi, \eta) \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \xi z + \eta$$

mit $\xi \in \mathbb{C}^*$ und $\eta \in \mathbb{C}$. Die Gruppenoperation ist durch die Komposition von Abbildungen gegeben.

Es gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} (\xi, \eta)^{-1} &= (\xi^{-1}, -\xi^{-1}\eta) \\ (\xi_1, \eta_1) \circ (\xi_2, \eta_2) &= (\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \eta_1) \\ GA(\mathbb{C})' &= \{(1, \eta) \mid \eta \in \mathbb{C}\} \\ GA(\mathbb{C})'' &= \{(1, 0)\} \\ Ab(GA(\mathbb{C})) &\cong \mathbb{C}^* \end{aligned}$$

Der Gruppenisomorphismus zwischen $Ab(GA(\mathbb{C}))$ und $\mathbb{C}^*$ wird von dem surjektiven Homomorphismus $\varphi \colon GA(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$, $(\xi, \eta) \mapsto \xi$ induziert, denn $\ker(\varphi) = GA(\mathbb{C})'$.

Sei nun $h \in \hom(G_{\mathfrak{L}}, GA(\mathbb{C}))$. Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ sei $h(x_i) = (\xi_i, \eta_i)$. Im Falle eines Knotens sehen die Relatoren aus (14) wie folgt aus:

$$r_i := \begin{cases} x_i x_{k_i} x_{s_i}^{-1} x_{k_i}^{-1} & \text{falls } \varepsilon_i = 1 \\ x_{s_i} x_{k_i} x_i^{-1} x_{k_i}^{-1} & \text{falls } \varepsilon_i = -1 \end{cases}$$

Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ ist k_i der Index des überkreuzenden Bogens an der Kreuzung am Ende des Bogens α_i. Für $i = 1, \ldots, m-1$ gilt $s_i = i + 1$ außerdem gilt $s_m = 1$.

Der Relator r_i impliziert nun $\xi_i = \xi_{s_i}$.
Begründung: Sei $\varepsilon_i = 1$. Es gilt $x_i x_{k_i} x_{s_i}^{-1} x_{k_i}^{-1} = 1$ in $G_{\mathfrak{L}}$. Daraus folgt

$(1,0) = h(x_i)h(x_{k_i})h(x_{s_i})^{-1}h(x_{k_i})^{-1} = (\xi_i\xi_{k_i}\xi_{s_i}^{-1}\xi_{k_i}^{-1},\ldots) = (\xi_i\xi_{s_i}^{-1},\ldots)$. Also gilt $\xi_i = \xi_{s_i}$. Der Fall $\varepsilon_i = -1$ verläuft analog.

Setze $\xi := \xi_1 = \cdots = \xi_m$.

Weiter folgern wir für $i = 1,\ldots,m$:

$$\begin{array}{rl} & r_i = 1 \qquad \text{in } G_{\mathfrak{L}} \\ \Longrightarrow & x_{k_i}^{\varepsilon_i} x_{s_i} = x_i x_{k_i}^{\varepsilon_i} \qquad \text{in } G_{\mathfrak{L}} \\ \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcll} \xi\eta_{s_i} + \eta_{k_i} & = & \xi\eta_{k_i} + \eta_i & \text{falls } \varepsilon_i = 1 \\ \xi^{-1}\eta_{s_i} - \xi^{-1}\eta_{k_i} & = & -\xi\xi^{-1}\eta_{k_i} + \eta_i & \text{falls } \varepsilon_i = -1 \end{array} \right. \end{array}$$

Wir erhalten schließlich für $i = 1,\ldots,m$:

$$\begin{array}{ll} (\xi-1)\eta_{k_i} - \xi\eta_{s_i} + \eta_i = 0 & \text{falls } \varepsilon_i = 1 \\ (\xi-1)\eta_{k_i} - \xi\eta_i + \eta_{s_i} = 0 & \text{falls } \varepsilon_i = -1 \end{array} \tag{18}$$

Das lineare Gleichungssystem (18) ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Zuordnung $h\colon x_i \mapsto (\xi,\eta_i)$ für $i = 1,\ldots,m$ zu einem Homomorphismus fortgesetzt werden kann.

Wir können (18) noch etwas vereinfachen: Da der m-te Relator r_m eine Konsequenz der Relatoren $r_1,\ldots,r_{m-1}$ ist (vgl. Satz 2.9), kann in (18) die Gleichung für $i = m$ weggelassen werden.

Zu $h \in \hom(G_{\mathfrak{L}}, GA(\mathbb{C}))$ mit $h(x_i) = (\xi,\eta_i)$ für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$ betrachte $\widetilde{h} \in \hom(G_{\mathfrak{L}}, GA(\mathbb{C}))$ gegeben durch $\widetilde{h}(x) := (1,-\eta_m)\circ h(x)$. Nun gilt $\widetilde{h}(x_m) = (\xi,0)$. Wir können also annehmen, dass gilt $\eta_m = 0$. Das lineare Gleichungssystem (18) wird so zu einem System von $m-1$ Gleichungen in $\eta_1,\ldots,\eta_{m-1}$. Die Koeffizienten hängen von ξ ab und bilden eine Matrix

$$M(\xi) \in Mat_{\mathbb{Z}[\xi]}(m-1, m-1).$$

Sei $\xi \in \mathbb{C}^*$. Nach dem bisher Gesagten ist folgende Abbildung eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} f\colon V(\xi) & \to & \{v \in \mathbb{C}^{n-1} \mid M(\xi)\cdot v = 0\} \\ h & \mapsto & \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{m-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

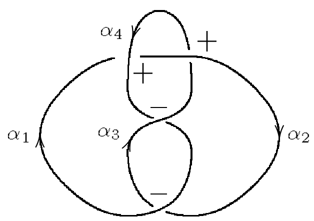
wobei $V(\xi) := \{h \in \hom(G_{\mathfrak{L}}, GA(\mathbb{C})) \mid h(x_m) = (\xi,0)\}$ und η_i durch $h(x_i) = (\xi,\eta_i)$ gegeben ist. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\Delta_k^{dR}(\mathfrak{L}) := \Delta_k(M(t)) \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]/\pm\mathfrak{Z} \tag{19}$$

Später (vgl. Satz 3.5) werden wir zeigen, dass $M(t)$ eine Präsentationsmatrix des Alexandermoduls von $\mathfrak{L}$ und folglich $\Delta_k^{dR}(\mathfrak{L})$ das k-te Alexanderpolynom von $\mathfrak{L}$ ist. Zunächst ein

Beispiel 3.2 *Für den Knoten $\mathfrak{L}$ aus Abbildung 1 d) wollen wir $\Delta_0^{dR}(\mathfrak{L})$ berechnen.*

Zunächst müssen wir ε_i und k_i aus der regulären Knotenprojektion ablesen:



$\mathfrak{L}$

i	1	2	3	4
ε_i	+	−	+	−
k_i	4	1	2	3

$m = 4$

Sei $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Laut (18) erhält man die i-te Zeile von $M(t)$ wie folgt: Falls $\varepsilon_i = 1$, so schreibe an i-te Stelle 1 und an $(i+1)$-te Stelle $-t$, sofern $i + 1 < m$. Falls $\varepsilon_i = -1$, so ist es genau umgekehrt. Falls $k_i < m$, so addiere an k_i-ter Stelle $t - 1$. Es ergibt sich für unseren konkreten Knoten

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ t-1 & -t & 1 \\ 0 & t-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt nun $\Delta_0^{dR}(\mathfrak{L}) = \pm\mathfrak{Z} \cdot \det(M(t)) = \pm\mathfrak{Z} \cdot (t^2 - 3t + 1)$. □

3.2 Elementare Berechnung einer Präsentationsmatrix A

Wir werden nun aus der Wirtingerpräsentation von $G_{\mathfrak{L}}$ eine weitere Präsentation von $G_{\mathfrak{L}}$ ableiten, die uns dann Präsentationen der Gruppen $G'_{\mathfrak{L}}$ und $Ab(G'_{\mathfrak{L}})$ liefert und schließlich eine endliche Präsentation des Alexandermoduls $Ab(G'_{\mathfrak{L}})$.

Da $\mathfrak{L}$ ein Knoten ist, gilt $Ab(G_{\mathfrak{L}}) \cong \mathfrak{Z} \cong \mathbb{Z}$ mit den in Lemma 2.15 beschriebenen Isomorphismen. Wir haben folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{Z} \\ \langle x_1, \dots, x_m | \rangle \arrow[urr, "\varphi"] \arrow[drr, "\widetilde{\varphi}"'] \arrow[r, two heads, "\pi"] & G_{\mathfrak{L}} \arrow[r, two heads, "ab_{G_{\mathfrak{L}}}"] & Ab(G_{\mathfrak{L}}) \arrow[u, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] \\ & & \mathfrak{Z} \arrow[uu, bend right=60, "t \mapsto 1"'] \end{tikzcd}$$

wobei φ und $\widetilde{\varphi}$ durch das Diagramm definiert werden. Es gilt $\varphi(x_i) = 1$ für $i \in \{1, \dots, m\}$.

Setze $\widehat{x}_i := x_i x_m^{-1}$ für $i = 1, \dots, m-1$. Es gilt $\varphi(\widehat{x}_i) = \varphi(x_i) - \varphi(x_m) = 0$. Daraus folgt $\pi(\widehat{x}_i) \in G'_{\mathfrak{L}}$. Die Elemente $\pi(\widehat{x}_1), \dots, \pi(\widehat{x}_{m-1}), \pi(x_m)$ bilden ein Erzeugendensystem von $G_{\mathfrak{L}}$.

Für ein Element $x \in \langle x_1, \dots, x_m | \rangle$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\pi(x) \in G'_{\mathfrak{L}}$ b) $\varphi(x) = 0$

c) x lässt sich schreiben als endliches Produkt von ganzzahligen Potenzen der Elemente $\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_{m-1}, x_m$, so dass die Summe der Exponenten von x_m Null ergibt.

Definiere $I := \{1, \dots, m-1\} \times \mathbb{Z}$. Nun ist $\{\pi(x_m^k \widehat{x}_l x_m^{-k}) \mid (l,k) \in I\}$ ein Erzeugendensystem von $G'_{\mathfrak{L}}$.

Die Aussagen a) bis c) gelten insbesondere für r_i ($i \in \{1, \dots, m\}$). Also kann r_i auch als Produkt von Elementen und Inversen des Systems $\{\pi(x_m^k \widehat{x}_l x_m^{-k}) | (l,k) \in I\}$ geschrieben werden: $r_i = \prod_{j=1}^{n_i} (x_m^{k_{ij}} \widehat{x}_{l_{ij}} x_m^{-k_{ij}})^{\varepsilon_{ij}}$. Es wird nicht behauptet, dass diese Produktdarstellung eindeutig ist. Wir werden in Satz 3.5 eine Art festlegen, r_i als solch ein Produkt zu schreiben. Wir definieren $\widetilde{r}_{i,s} := \prod_{j=1}^{n_i} x_{l_{ij}, k_{ij}+s}^{\varepsilon_{ij}} \in F$ mit $F := \langle \{x_{l,k}\}_{(l,k) \in I} | \rangle$ und erhalten folgendes

Lemma 3.3

$$G'_{\mathfrak{L}} = \langle \{x_{l,k}\}_{(l,k) \in I} \mid \{\widetilde{r}_{is}\}_{(i,s) \in I} \rangle$$

Beweis: Betrachte den injektive Homomorphismus

$$\imath \colon F \to \langle x_1, \dots, x_m | \rangle \qquad x_{l,k} \mapsto x_m^k \widehat{x}_l x_m^{-k} \text{ für } (l,k) \in I.$$

Wir müssen zeigen, dass der von $\{r_1, \dots, r_{m-1}\}$ in $\langle x_1, \dots, x_m | \rangle$ erzeugte Normalteiler $N(r_1, \dots, r_{m-1})$ gleich dem Bild des von $\{\widetilde{r}_{i,s} \mid (i,s) \in I\}$ in F erzeugten Normalteilers $N(\widetilde{r})$ unter der Abbildung $\imath$ ist.

Es gilt $\imath(\widetilde{r}_{i,s}) = x_m^s r_i x_m^{-s} \in N(r_1, \dots, r_{m-1})$, das heißt $\imath(N(\widetilde{r}))$ ist in $N(r_1, \dots, r_{m-1})$ enthalten.

Sei umgekehrt $r \in N(r_1, \dots, r_{m-1})$. Dann existieren $n \in \mathbb{N}$, $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, m-1\}$ und $f_1, \dots, f_n \in F$ mit $r = \prod_{i=1}^n f_i r_{j_i} f_i^{-1}$. Wir müssen also für $f \in F$ und $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ein Urbild für $f r_i f^{-1}$ finden. f kann als reduziertes Wort[16] geschrieben werden (z. B. $f = x_1 x_2 x_3^{-1} = \widehat{x}_1 x_m \widehat{x}_2 x_m x_m^{-1} \widehat{x}_3^{-1} = \widehat{x}_1 x_m \widehat{x}_2 \widehat{x}_3^{-1}$). Daraus erhält man eine Darstellung von f der Form $f = \left(\prod_{j=1}^n x_m^{k_j} \widehat{x}_{l_j}^{\varepsilon_j} x_m^{-k_j} \right) \cdot x_m^s$. (Für obiges Beispiel finden wir $f = \widehat{x}_1 (x_m \widehat{x}_2 x_m^{-1})(x_m \widehat{x}_3^{-1} x_m^{-1}) x_m^1$). Nun gilt mit $\widetilde{f} := \prod_{j=1}^n x_{l_j, k_j}^{\varepsilon_j}$

$$\imath(\widetilde{f} \widetilde{r}_{i,s} \widetilde{f}^{-1}) = f r_i f^{-1}.$$

□

[16] Ein Wort in den Elementen $y_1, \dots, y_k$ ist ein endliches formales Produkt der Elemente y_i und y_i^{-1}. Das Wort heißt reduziert, falls auf y_i nicht y_i^{-1} und auf y_i^{-1} nicht y_i folgt ($i \in \{1, \dots, k\}$).

Mit der Intention, später die untere Zeile zu einer endlichen Präsentation des Alexandermoduls auszubauen, betrachten wir folgendes Diagramm:

(20)
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\widetilde{\psi}"] \arrow[d, "ab"'] & G'_{\mathfrak{L}} \arrow[d, "ab'"] \\ \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]^{m-1} \arrow[r, "\psi"] & Ab(G'_{\mathfrak{L}}) \end{tikzcd}$$

Die Abbildungen sind wie folgt gegeben:

- ab' bezeichnet die abelianisierende Abbildung von $G'_{\mathfrak{L}}$.
  Für $i = 1, \ldots, m-1$ setzen wir $b_i := ab'(\pi(\widehat{x}_i))$.
- $ab(x_{i,k}) := t^k e_i$ für alle $(i,k) \in I$. Beachte, dass $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]^{m-1}$ die freie abelsche Gruppe zur Basis $\{t^k e_i\}_{(i,k)\in I}$ ist.
- Für alle $(i,k) \in I$ sei $\widetilde{\psi}(x_{i,k}) := \pi(x_m^k \widehat{x}_i x_m^{-k})$ und $\psi(t^k e_i) := t^k b_i$.

Das Diagramm (20) ist kommutativ. BEWEIS:

$$\begin{aligned} ab' \circ \widetilde{\psi}(x_{i,k}) = ab' \circ \pi(x_m^k \widehat{x}_i x_m^{-k}) &\overset{\clubsuit}{=} ab_{G_{\mathfrak{L}}} \circ \pi(x_m)^k \cdot ab' \circ \pi(\widehat{x}_i) \\ &\overset{\spadesuit}{=} \widetilde{\varphi}(x_m)^k \cdot b_i = t^k b_i = \psi(t^k e_i) = \psi \circ ab(x_{i,k}) \end{aligned}$$

Bei ($\clubsuit$) wird Lemma 2.30 angewendet und bei ($\spadesuit$) benutzen wir Lemma 2.27. Der Punkt $\cdot$ bezeichnet die Skalarmultiplikation des Moduls $Ab(G'_{\mathfrak{L}})$ über dem Ring $\mathbb{Z}[Ab(G_{\mathfrak{L}})]$ bzw. $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]$. $\square$

Für $i = 1, \ldots, m$ gilt $ab(\widetilde{r}_{i,0}) = \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij} e_j$ mit eindeutig bestimmten $a_{ij} \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]$. Für $(i,s) \in I$ folgt $ab(\widetilde{r}_{i,s}) = \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij} t^s e_j$.

Mit $A := (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m-1 \\ j=1,\ldots,m-1}} \in Mat_{\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]}(m-1, m-1)$ gilt der folgende

Satz 3.4 $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]^{m-1} \xrightarrow{A^T} \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]^{m-1} \xrightarrow{\psi} Ab(G'_{\mathfrak{L}}) \longrightarrow 0$ *ist eine endliche Präsentation des Moduls $Ab(G'_{\mathfrak{L}})$ über $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]$. Insbesondere ist A eine Präsentationsmatrix des Alexandermoduls.*

BEWEIS: Im Beweis der Kommutativität von Diagramm (20) haben wir gesehen, dass gilt $ab' \circ \pi(x_m^k \widehat{x}_i x_m^{-k}) = t^k b_i$. Daraus folgt, dass $b_1, \ldots, b_{m-1}$ ein Erzeugendensystem des Moduls $Ab(G_{\mathfrak{L}})$ ist und somit die Surjektivität von ψ.

Wir zeigen zuerst $\mathrm{im}(A^T) \subset \ker(\psi)$. Sei $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

$$\psi \circ A^T(e_i) = \psi\left(\sum_{j=1}^{m-1} a_{ij} e_j\right) = \psi \circ ab(\widetilde{r}_i) = ab' \circ \widetilde{\psi}(\widetilde{r}_i) = 0$$

Uns bleibt zu zeigen: $\ker(\psi) \subset \mathrm{im}(A^T)$.
Sei $p \in \ker(\psi)$. Es gibt $\widetilde{p} \in F$ mit $ab(\widetilde{p}) = p$. Es gilt $ab' \circ \widetilde{\psi}(\widetilde{p}) = \psi \circ ab(\widetilde{p}) = 0$, d. h. $\widetilde{p} \in \ker(ab' \circ \widetilde{\psi}) = N(Rel)$ wobei $Rel := \{\widetilde{r}_{i,s} \mid (i,s) \in I\} \cup \{fgf^{-1}g^{-1} \mid f,g \in F\}$. Also ist $\widetilde{p}$ von der Form $\widetilde{p} = \prod_{i=1}^n \widetilde{\xi}_i \widetilde{\varrho}_i^{\varepsilon_i} \widetilde{\xi}_i^{-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\widetilde{\xi}_i \in F$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $\widetilde{\varrho}_i \in Rel$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach Anwenden von ab erhalten wir $p = \sum_{i=1}^n (\xi_i + \varepsilon_i \varrho_i - \xi_i) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varrho_i$, wobei $\varrho_i := ab(\widetilde{\varrho}_i)$ und $\xi_i := ab(\widetilde{\xi}_i)$.

Für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\varrho_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m-1} a_{kj} t^s e_j = A^T(t^s e_k) & \text{falls } \widetilde{\varrho}_i = \widetilde{r}_{k,s} \text{ mit } (k,s) \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also gilt $p \in \mathrm{im}(A^T)$. □

3.3 Vergleich der Matrizen $M(t)$ und A

Wir benutzen weiterhin die Bezeichnungen der letzten Abschnitte.

Satz 3.5 *Es gilt $M(t) = A$. Insbesondere gilt $\Delta_k^{dR}(\mathfrak{L}) = \Delta_k(\mathfrak{L})$.*

Beweis: Wir wissen schon, wie die Einträge von $M(t)$ aussehen (vgl. (18) und Beispiel 3.2). Wir müssen noch die Einträge von A berechnen. Dies werden wir zeilenweise tun. Es treten mehrere Fälle auf. In jedem Fall werden wir zuerst r_i als Produkt von Elementen und Inversen des Systems $\{x_m^k \widehat{x}_i x_m^{-k} | (i,k) \in I\}$ schreiben. Damit wissen wir, wie wir $\widetilde{r}_{i,0}$ setzen sollen. Zuletzt berechnen wir jeweils $ab(\widetilde{r}_{i,0}) = \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij} e_j$ und vergleichen die Koeffizienten.

Sei $i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Angenommen es gilt $\varepsilon_i = 1$.

1. Es gelte $i + 1 < m$ und $k_i < m$.

$$\begin{aligned} r_i &= x_i x_{k_i} x_{i+1}^{-1} x_{k_i}^{-1} = \widehat{x}_i x_m \widehat{x}_{k_i} x_m x_m^{-1} \widehat{x}_{i+1}^{-1} x_m^{-1} \widehat{x}_{k_i}^{-1} \\ &= \widehat{x}_i (x_m \widehat{x}_{k_i} x_m^{-1})(x_m \widehat{x}_{i+1}^{-1} x_m^{-1}) \widehat{x}_{k_i}^{-1} \\ \widetilde{r}_{i,0} &:= x_{i,0} x_{k_i,1} x_{i+1,1}^{-1} x_{k_i,0}^{-1} \\ ab(\widetilde{r}_{i,0}) &= e_i + te_{k_i} - te_{i+1} - e_{k_i} \\ &= (t-1)e_{k_i} - te_{i+1} + e_i \end{aligned}$$

   Der Vergleich mit (18) und der Definition von M liefert die Übereinstimmung der i-ten Zeilen der Matrizen A und $M(t)$ in diesem Fall.

2. Es gelte $i + 1 = m$ und $k_i < m$.

$$\begin{aligned} r_i &= x_i x_{k_i} x_{i+1}^{-1} x_{k_i}^{-1} = \widehat{x}_i x_m \widehat{x}_{k_i} x_m x_m^{-1} x_m^{-1} \widehat{x}_{k_i}^{-1} \\ &= \widehat{x}_i (x_m \widehat{x}_{k_i} x_m^{-1}) \widehat{x}_{k_i}^{-1} \\ \widetilde{r}_{i,0} &:= x_{i,0} x_{k_i,1} x_{k_i,0}^{-1} \\ ab(\widetilde{r}_{i,0}) &= e_i + te_{k_i} - e_{k_i} \\ &= (t-1)e_{k_i} + e_i \end{aligned}$$

Der Vergleich mit M ergibt wieder die Übereinstimmung der i-ten Zeilen.

3. Es gelte $i+1 < m$ und $k_i = m$.

$$\begin{aligned} r_i &= x_i x_{k_i} x_{i+1}^{-1} x_{k_i}^{-1} = \widehat{x}_i x_m x_m x_m^{-1} \widehat{x}_{i+1}^{-1} x_m^{-1} \\ &= \widehat{x}_i (x_m \widehat{x}_{i+1}^{-1} x_m^{-1}) \\ \widetilde{r}_{i,0} &:= x_{i,0} x_{i+1,1}^{-1} \\ ab(\widetilde{r}_{i,0}) &= e_i - t e_{i+1} \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit M ergibt sich auch hier die Übereinstimmung der i-ten Zeilen von A und $M(t)$.

4. Es gelte $i+1 = m$ und $k_i = m$.

$$\begin{aligned} r_i &= x_i x_{k_i} x_{i+1}^{-1} x_{k_i}^{-1} = x_i x_m^{-1} = \widehat{x}_i \\ \widetilde{r}_{i,0} &:= x_{i,0} \\ ab(\widetilde{r}_{i,0}) &= e_i \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall erfüllt der Vergleich mit M unsere Erwartungen.

Der Fall $\varepsilon_i = 1$ ist nun erledigt. Der Fall $\varepsilon_i = -1$ verläuft ähnlich. □

4 Berechnung von Alexanderinvarianten mit dem Fox-Kalkül

Sei $\mathfrak{L}$ eine Verschlingung mit κ Komponenten. Es sei eine Präsentation $\langle x_1, \ldots, x_m | r_1, \ldots, r_n \rangle$ der Gruppe von $\mathfrak{L}$ gegeben.

Wir werden eine Präsentation eines mit $H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c})$ verwandten Moduls berechnen und später beide Moduln vergleichen. Falls $\mathfrak{L}$ ein Knoten ist, erhalten wir eine Präsentation des Alexandermoduls. Im Falle einer mehrkomponentigen Verschlingung werden wir nur die Alexanderpolynome erhalten.

4.1 Endliche Gruppenpräsentationen und CW-Komplexe

Sei X ein endlicher CW-Komplex.[17] Mit $X^{(k)}$ bezeichnen wir das k-Gerüst von X.

Sei $A \subset X$ ein Unterkomplex. X ist ein CW-Komplex relativ A mit i-Gerüst $X_A^{(i)} := A \cup X^{(i)}$ und (-1)-Gerüst $X_A^{(-1)} := A$.

$C_i(X, A) := H_i(X_A^{(i)}, X_A^{(i-1)})$ bezeichnet die i-te Gruppe des zellulären Kettenkomplexes von (X, A). Im Fall $A = \emptyset$ schreibt man einfach $C_i(X)$. $C_i(X, A)$ ist die freie abelsche Gruppe mit der Menge der nicht in A liegenden i-Zellen als Basis. Die Randabbildung c_i des zellulären Kettenkomplexes ist gegeben durch die Komposition $H_i(X_A^{(i)}, X_A^{(i-1)}) \to H_{i-1}(X_A^{(i-1)}) \to H_{i-1}(X_A^{(i-1)}, X_A^{(i-2)})$, wobei die Abbildungen den langen exakten Homologiesequenzen der Paare $(X_a^{(i)}, X_A^{(i-1)})$ bzw. $(X_A^{(i-1)}, X_A^{(i-2)})$ entnommen sind.

$Z_i(X, A) := \ker(c_i) \subset C_i(X, A)$ ist die Gruppe der i-Zykel relativ A. $H_i^{zell}(X, A)$ bezeichnet die i-te Homologiegruppe des zellulären Kettenkomplexes von (X, A). Für $i \in \mathbb{N}$ gilt $H_i^{zell}(X, A) \cong H_i(X, A)$.

Lemma 4.1 *Zu jeder endlichen Präsentation $\langle x_1, \ldots, x_m | r_1, \ldots, r_n \rangle$ einer Gruppe G existiert ein endlicher 2-dimensionaler CW-Komplex X mit genau einer 0-Zelle P, so dass $\pi_1(X^{(1)}, P) = \langle x_1, \ldots, x_m | \rangle$ und $\pi_1(X, P) \cong G$.*

Konstruktion: $X^{(0)} := \{P\}$.

Wir konstruieren zuerst $X^{(1)}$. Für jeden der Erzeuger $x_1, \ldots, x_m$ der Präsentation von G heften wir eine 1-Zelle an den Punkt P:
Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ nehme $[0,1] \times \{i\}$ und identifiziere $(0, i)$ und $(1, i)$ mit P $(P \sim (0, i) \sim (1, i))$.

$$X^{(1)} := \bigcup_{i \in \{1, \ldots, m\}} [0,1] \times \{i\} / \sim$$

Auf jeder dieser 1-Zellen ist eine Orientierung gegeben. Wir identifizieren $x_1, \ldots, x_m$ mit den entsprechenden, orientierten 1-Zellen. Der Satz von Seifert und van Kampen ergibt $\langle x_1, \ldots, x_m | \rangle = \pi_1(X^{(1)}, P)$.

[17] Zur Definition vergleiche z. B. [7] oder [5].

Nun konstruieren wir $X = X^{(2)}$. Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. r_j ist als Produkt der Erzeuger $x_1, \ldots, x_m$ und deren Inversen gegeben: $r_j = \prod_{k=1}^{l_j} x_{\nu_k}^{\varepsilon_k}$ mit $l_j \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$, $\nu_k \in \{1, \ldots, m\}$ für $k = \{1, \ldots, l_j\}$. r_j entspricht somit einem geschlossenen Weg in $X^{(1)}$. Mit D^2 bezeichnen wir die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Wir heften die 2-Zelle $D^2 \times \{j\}$ an $X^{(1)}$, indem wir den Rand dieser 2-Zelle mit dem Weg r_j verkleben: Sei $t \in [0, l_j]$.

$$
\begin{array}{rcl}
S^1 \times \{j\} & \to & X^{(1)} \\
(e^{i\frac{2\pi}{l_j}t}, j) & \mapsto & \begin{cases} (t - k + 1, \nu_k) & \text{falls } t \in [k-1, k] \text{ und } \varepsilon_k = 1 \\ (k - t, \nu_k) & \text{falls } t \in [k-1, k] \text{ und } \varepsilon_k = -1 \end{cases}
\end{array}
$$

Der Satz von Seifert und van Kampen liefert nun $G = \pi_1(X, P)$. $\square$

Sei $p\colon \widetilde{X} \to X$ die normale Überlagerung von X zum Normalteiler $N \subset G$ und $\widetilde{P}$ ein Punkt über P. X induziert auf $\widetilde{X}$ die Struktur eines CW-Komplexes. Für die Gruppe $\mathcal{D}_{\widetilde{X}}$ der Deckbewegungen von $\widetilde{X}$ gilt $\mathcal{D}_{\widetilde{X}} \cong G/N$ (vgl. Lemma 2.26).

Wir interessieren uns für den $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$-Modul $H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})$. Hier wird die Skalarmultiplikation von der Abbildung

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{D}_{\widetilde{X}} \times \{i\text{-Simplizes von } \widetilde{X}\} & \to & \{i\text{-Simplizes von } \widetilde{X}\} \\
(\psi, \sigma) & \mapsto & \psi \circ \sigma
\end{array}
$$

induziert.

Die Abbildung $\varphi\colon \langle x_1, \ldots, x_m | \rangle \to \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$ sei folgende Komposition von natürlichen Projektionen und Inklusionen:

$$
\varphi\colon \langle x_1, \ldots, x_m | \rangle \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow \mathcal{D}_{\widetilde{X}} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}] \tag{21}
$$

Laut Lemma 2.20 induziert φ eine Abbildung $\mathbb{Z}[\langle x_1, \ldots, x_m | \rangle] \to \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$, die wir ebenfalls mit φ bezeichnen. Beachte: Da der Homomorphismus $G \twoheadrightarrow \mathcal{D}_{\widetilde{X}}$ mit den üblichen Notationen für die Komposition von Wegen und Abbildungen die Reihenfolge der Faktoren vertauscht, gilt $\varphi(w_1 \cdot w_2) = \varphi(w_2) \cdot \varphi(w_1)$ für $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}[\langle x_1, \ldots, x_m | \rangle]$.

Sei $w \in \pi_1(X^{(1)}, P) = \langle x_1, \ldots, x_m | \rangle$. Es existiert eine eindeutige Hochhebung von w nach $\widetilde{X}$ zum Anfangspunkt $\widetilde{P}$ und diese repräsentiert ein Element $\widetilde{w} \in C_1(\widetilde{X}) = Z_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})$. $C_1(\widetilde{X})$ ist der freie $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$-Modul zur Basis $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m$, denn $\mathcal{D}_{\widetilde{X}}$ operiert frei und transitiv auf $\widetilde{X}$. $\widetilde{w}$ besitzt eine eindeutige Darstellung $\widetilde{w} = \sum_{j=1}^m a_j \widetilde{x}_j$ mit $a_j \in \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$ für $i = 1, \ldots, m$.

Definition 4.2 *Setze* $\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^{\varphi} := a_j$ *für* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *und*

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\varphi} : \langle x_1, \ldots, x_m | \rangle \to \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}] \qquad w \mapsto \left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^{\varphi}.
$$

Lemma 4.3 *Für $w_1, w_2 \in \pi_1(X^{(1)}, P)$ gilt:*

$$\widetilde{w_1 w_2} = \widetilde{w}_1 + \varphi(w_1)\widetilde{w}_2$$

Beweis: $\widetilde{w_1 w_2}$ ist die Hochhebung des Weges $w_1 w_2$ zum Anfangspunkt $\widetilde{P}$ als Element von $C_1(\widetilde{X})$ aufgefasst. $\varphi(w_1)\widetilde{P}$ ist der Endpunkt der Hochhebung $\widetilde{w}_1$. Somit ist $\varphi(w_1)\widetilde{w}_2 \in C_1(\widetilde{X})$ die Hochhebung von w_2 zum Anfangspunkt $\varphi(w_1)\widetilde{P}$. Die Verknüpfung der Wege $\widetilde{w}_1$ und $\varphi(w_1)\widetilde{w}_2$ wird in $C_1(\widetilde{X})$ von der Addition geleistet. □

Mit $\widetilde{w}_k = \sum_{j=1}^m a_{kj}\widetilde{x}_j$ und $\widetilde{w_1 w_2} = \sum_{j=1}^m a_j \widetilde{x}_j$, wobei $a_{kj}, a_j \in \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$ und $k \in \{1, 2\}$, erhält man aus Lemma 4.3 durch Koeffizientenvergleich

$$a_j = a_{1j} + \varphi(w_1)a_{2j} \quad \text{für } j = 1, \ldots, m.$$

Das heißt, es gilt folgende Produktregel:

$$\left(\frac{\partial(w_1 w_2)}{\partial x_j}\right)^\varphi = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_j}\right)^\varphi + \varphi(w_1)\left(\frac{\partial w_2}{\partial x_j}\right)^\varphi \tag{22}$$

Wir können die Abbildung $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^\varphi$ auf genau eine Weise zu einer Abbildung $\mathbb{Z}[\langle x_1, \ldots, x_m | \rangle] \to \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$ fortsetzen, so dass

$$\left(\frac{\partial(w_1 + w_2)}{\partial x_j}\right)^\varphi = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_j}\right)^\varphi + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_j}\right)^\varphi \quad \text{für } w_1, w_2 \in \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]. \tag{23}$$

Auch die 2-Zellen von X können wir zu 2-Zellen von $\widetilde{X}$ hochheben. Seien $s_1, \ldots, s_n$ die 2-Zellen von X. Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ wählen wir die Hochhebung $\widetilde{s}_i \in C_2(\widetilde{X}) = C_2(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})$ von s_i, für die gilt $c_2(\widetilde{s}_i) = \widetilde{r}_i$, dabei bezeichnet c_2 die Randabbildung $C_2(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)}) \to Z_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})$. Da $\mathcal{D}_{\widetilde{X}}$ auf $\widetilde{X}$ transitiv operiert, ist jede 2-Zelle von $\widetilde{X}$ von der Gestalt $a\widetilde{s}_i$ mit $a \in \mathcal{D}_{\widetilde{X}}$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\widetilde{s}_1, \ldots, \widetilde{s}_n$ ist eine Basis des freien $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$-Moduls $C_2(\widetilde{X})$. Die darstellende Matrix von c_2 in den gewählten Basen ist $\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^\varphi_{ji}$.

Für den $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$-Modul $H_1^{zell}(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})$ haben wir nun folgende endliche Präsentation:

$$\begin{array}{ccccccc} C_2(\widetilde{X}) & \xrightarrow{\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^\varphi_{ji}} & C_1(\widetilde{X}) & \longrightarrow & H_1^{zell}(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \widetilde{x}_i & \longmapsto & [\widetilde{x}_i] & & \end{array} \tag{24}$$

Beachte: $C_2(\widetilde{X}) = C_2(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})$ und $C_1(\widetilde{X}) = Z_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})$.

Das eigentliche Ziel unserer Untersuchungen ist jedoch der $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$-Modul $H_1(\widetilde{X})$. Die lange exakte Homologiesequenz des Paares $(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})$ setzt die beiden Moduln in Verbindung.

$$(25)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_1(\widetilde{X}) \arrow[r, "\alpha"] & H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)}) \arrow[r, "\partial"] & H_0(\widetilde{X}^{(0)}) \arrow[r] & H_0(\widetilde{X}) \\ & & & \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}] \arrow[u, "1\mapsto\widetilde{P}", "\cong"'] \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[u, "1\mapsto\widetilde{P}", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Die Augmentationsabbildung ε und das Augmentationsideal $\Im\mathcal{D}_{\widetilde{X}}$ werden in Definition 4.4 erklärt. Das Rechteck in (25) ist kommutativ. Aus (25) erhalten wir nun folgende kurze exakte Sequenz:

$$(26)\qquad 0 \longrightarrow H_1(\widetilde{X}) \xrightarrow{\alpha} H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)}) \xrightarrow{\beta} \Im\mathcal{D}_{\widetilde{X}} \longrightarrow 0$$

Diese beiden Sequenzen bilden in Abschnitt 4.3 den Ansatzpunkt für den Vergleich von $\Delta_k\left(\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\varphi}_{ij}\right)$ und $\Delta_k(\mathfrak{L})$.

4.2 Differentialrechnung in Gruppenringen

Um die Präsentationsmatrix $\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\varphi}_{ij}$ der gerade gefundenen Präsentation tatsächlich berechnen zu können und auch für spätere theoretische Anwendungen entwickeln wir nun den Fox-Kalkül. Vergleiche [12].

F sei eine multiplikativ geschriebene Gruppe.

Definition 4.4 *Der Homomorphismus*

$$\varepsilon\colon \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z} \qquad \sum_{i=1}^{k} n_i f_i \mapsto \sum_{i=1}^{k} n_i \quad \textit{für } k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}, f_i \in \mathbb{Z}[F]$$

*heißt **Augmentation** von F und $\Im F := \ker(\varepsilon)$ heißt das **Augmentationsideal** von F.*

Definition 4.5 *Eine Abbildung $\delta\colon \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[F]$ heißt Ableitung in $\mathbb{Z}[F]$, falls für alle $p, q \in \mathbb{Z}[F]$ folgende Gleichungen gelten:*

$$(27)\qquad \delta(p+q) = \delta(p) + \delta(q) \qquad \textit{Additivität}$$

$$(28)\qquad \delta(p\cdot q) = \delta(p)\cdot\varepsilon(q) + p\cdot\delta(q) \qquad \textit{Produktregel}$$

Bemerkung 4.6 *Die Menge $\mathrm{Der}(\mathbb{Z}[F])$ der Ableitungen in $\mathbb{Z}[F]$ ist ein Rechts-$\mathbb{Z}[F]$-Modul: Seien $\delta, \delta_1, \delta_2$ Ableitungen in $\mathbb{Z}[F]$ und $p, q \in \mathbb{Z}[F]$.*

$$(\delta_1+\delta_2)(p) := \delta_1(p) + \delta_2(p)$$
$$(\delta\cdot q)(p) := \delta(p)\cdot q$$

Lemma 4.7 *Für eine Ableitung δ in $\mathbb{Z}[F]$ gelten folgende Rechenregeln: Sei $k \in \mathbb{Z}$, $f \in F$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.*

$$\begin{aligned} \delta(k) &= 0 \\ \delta(f^{-1}) &= -f^{-1} \cdot \delta(f) \\ \delta(f^n) &= (1 + f + \cdots + f^{n-1}) \cdot \delta(f) \\ \delta(f^{-n}) &= -(f^{-1} + \cdots + f^{-n}) \cdot \delta(f) \end{aligned}$$

Beweis: Benutze (28). Vergleiche [12] Kapitel VII Abschnitt 2. $\square$

Sei im Folgenden F die freie Gruppe zur Basis $x_1, \ldots, x_m$.

Lemma 4.8 *Seien $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{Z}[F]$ beliebig. Dann existiert genau eine Ableitung $\delta\colon \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[F]$ mit $\delta(x_i) = f_i$ für $i = 1, \ldots m$.*

Beweis: Aus $\delta(x_i^{-1}) = -x_i^{-1} f_i$, der Produktregel und der Additivität folgt die Eindeutigkeit. Existenz: Wir definieren $\delta(x_i^{-1}) := -x_i^{-1} f_i$. Sei $w \in F$. Dann ist $w = \prod_{j=1}^k x_{i_j}^{\varepsilon_j}$ mit $k \in \mathbb{N}$, $i_j \in \{1, \ldots, m\}$ und $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$ für $j = 1, \ldots, k$. Diese Darstellung von w ist eindeutig bis auf Weglassen oder Einfügen von Termen der Gestalt $x_i x_i^{-1}$ bzw. $x_i^{-1} x_i$ mit $i \in \{1, \ldots, m\}$. Wir nehmen an, dass wir in der Darstellung von w alle solchen Paare weggelassen haben. Dies ist die reduzierte Darstellung von w und sie ist eindeutig. Wir benutzen die Produktregel (28) und definieren

$$\delta(w) := \delta(x_{i_1}^{\varepsilon_1}) + x_{i_1}^{\varepsilon_1} \delta(x_{i_2}^{\varepsilon_2}) + \cdots + x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}} \delta(x_{i_k}^{\varepsilon_k}).$$

Mit dieser Definition folgt $\delta(vw) = \delta(v) + v\delta(w)$ für $v, w \in F$. Man beachte, dass die Zusammensetzung zweier reduzierter Wörter nicht notwendigerweise selbst ein reduziertes Wort ergibt. Nun kann man δ additiv auf ganz $\mathbb{Z}[F]$ fortsetzen. $\square$

Definition 4.9 *Sei $j \in \{1, \ldots, m\}$. Die Ableitung $\mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[F]$ mit*

$$x_i \mapsto \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j \\ 0 & \textit{falls } i \in \{1, \ldots, m\}\backslash\{j\} \end{cases}$$

bezeichnen wir mit $\frac{\partial}{\partial x_j}$. Für $p \in \mathbb{Z}[F]$ schreibe auch $\frac{\partial p}{\partial x_j}$ statt $\frac{\partial}{\partial x_j}(p)$.

Lemma 4.10

1. *Die Menge $\mathrm{Der}(\mathbb{Z}[F])$ der Ableitungen in $\mathbb{Z}[F]$ ist ein freier Rechts-$\mathbb{Z}[F]$-Modul mit Basis $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$.*

2. *Für $p \in \mathbb{Z}[F]$ gilt $p - \varepsilon(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial p}{\partial x_j} \cdot (x_j - 1)$.*

3. *Für $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Z}[F]$ gilt $p - \varepsilon(p) = \sum_{j=1}^m q_j \cdot (x_j - 1)$ genau dann, wenn $q_j = \frac{\partial p}{\partial x_j}$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$.*

Beweis:

1. Für jede Ableitung δ von $\mathbb{Z}[F]$ gilt

$$\delta = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \delta(x_j) \tag{29}$$

da beide Ableitungen auf $x_1, \ldots, x_m$ übereinstimmen. Für $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{Z}[F]$ erhalten wir mit Lemma 4.8

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot p_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_j = 0 \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, m\}.$$

2. Setze $\delta_\varepsilon(p) := p - \varepsilon(p)$ für $p \in \mathbb{Z}[F]$. Dann ist δ_ε eine Ableitung in $\mathbb{Z}[F]$. Anwenden von (29) auf δ_ε liefert die Behauptung.

3. Es gelte $p - \varepsilon(p) = \sum_{j=1}^{m} q_j \cdot (x_j - 1)$. Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt dann

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(p - \varepsilon(p)) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{m} q_j \cdot (x_j - 1)\right) = q_i.$$

□

Lemma 4.11 *Für $j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt* $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^\varphi = \varphi \circ \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Beweis: Aus den Definitionen folgt direkt $\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)^\varphi = \varphi \circ \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$. Setzt man in (22) $w_i := x_i^{-1}$ und $w_2 := x_i$, so errechnet man

$$\left(\frac{\partial x_i^{-1}}{\partial x_j}\right)^\varphi = \begin{cases} -\varphi(x_i^{-1}) & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}.$$

Mit der zweiten Gleichung aus Lemma 4.7 erhält man

$$\varphi \circ \frac{\partial x_i^{-1}}{\partial x_j} = \begin{cases} -\varphi(x_i^{-1}) & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}.$$

Vergleich der Produktregeln (22) und (28) ergibt nun die Gleichheit der beiden Abbildungen eingeschränkt auf F.
Begründung: Induktion über die Wortlänge. Für $f \in F$ gelte die Behauptung. Sei $k \in \{1, \ldots, m\}$ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial (f x_k^\varepsilon)}{\partial x_j}\right)^\varphi &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\varphi + \varphi(f)\left(\frac{\partial x_k^\varepsilon}{\partial x_j}\right)^\varphi = \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) + \varphi(f) \cdot \varphi\left(\frac{\partial x_k^\varepsilon}{\partial x_j}\right) \\
&= \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + f \cdot \frac{\partial x_k^\varepsilon}{\partial x_j}\right) = \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \varepsilon(x_k^\varepsilon) + f \cdot \frac{\partial x_k^\varepsilon}{\partial x_j}\right) \\
&= \varphi\left(\frac{\partial (f x_k^\varepsilon)}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}$$

Da nun beide Abbildungen additiv sind (vgl. (23) und (27)), folgt die Behauptung. $\square$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Abschließend wollen wir das Augmentationsideal von $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$ untersuchen. Dabei verwenden wir wieder die in Abschnitt 2.4 eingeführte Abbildung $\sharp\colon \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n] \to \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ (vgl. (15)).

Lemma 4.12 *$\Im\mathfrak{Z}^n$ wird von $t_1 - 1, \ldots, t_n - 1$ erzeugt.*

Beweis: Sei $p \in \Im\mathfrak{Z}^n$. Dann ist auch $\sharp p \in \Im\mathfrak{Z}^n$ und $p = e \cdot \sharp p$ mit $e \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]^*$. Wir können also gleich annehmen, dass $p \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$. Wir führen den Beweis per Induktion über den Grad von p.

Falls p vom Grad 1 ist, so gilt $p = a_1 t_1 + \cdots + a_n t_n + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ und $a_0 = a_1 + \cdots + a_n$. Also $p = a_1(t_1 - 1) + \cdots + a_n(t_n - 1)$.

Sei $p = a_1 p_1 + \cdots + a_r p_r + p'$. Dabei seien $r \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$. $p_1, \ldots, p_r$ seien Monome vom Grad k und $\mathrm{grad}(p') < k$. Sei $i \in \{1, \ldots, r\}$. Es gibt $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{N}$ mit $\nu_{i1} + \cdots + \nu_{in} = k$, so dass gilt $p_i = t_1^{\nu_{i1}} \cdots t_n^{\nu_{in}}$. Definiere $p_< := p - \sum_{i=1}^r a_i (t_1 - 1)^{\nu_{i1}} \cdots (t_n - 1)^{\nu_{in}} \in \Im\mathfrak{Z}^n$. Der Grad von $p_<$ ist kleiner als k. Nun gilt laut Induktionsvoraussetzung, dass $p_<$ im Erzeugnis der Elemente $t_1 - 1, \ldots, t_n - 1$ liegt. Wegen der Definition von $p_<$ gilt dies nun auch für p selber. $\square$

Lemma 4.13 *Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist $t_k - 1$ prim in $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$.*

Beweis: Angenommen $t_k - 1$ ist reduzibel in $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$. Es gibt dann $p, q \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n] \setminus \pm \mathfrak{Z}^n$ mit $t_k - 1 = p \cdot q$. Es folgt $t_k - 1 = \sharp(t_k - 1) = \sharp(p \cdot q) = \sharp p \cdot \sharp q$. Dies ist eine Gleichung in $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ und $\sharp p, \sharp q \notin \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]^* = \{\pm 1\}$. Wäre unsere Annahme richtig, so wäre $t_k - 1$ ein reduzibeles Polynom. Widerspruch. $\square$

Lemma 4.14 *$\Im\mathfrak{Z}^n$ ist genau dann ein freier Modul über $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$, wenn $n = 1$.*

Beweis: Sei $n > 1$. Angenommen $b_1, \ldots, b_k$ bilden eine Basis von $\Im\mathfrak{Z}^n$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $k = 1$. Es gilt $\mathrm{ggT}(\Im\mathfrak{Z}^n) = 1$, d. h. $b_1 \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]^* = \pm\mathfrak{Z}^n$. Es folgt $\varepsilon(b_1) = 1 \neq 0$. Widerspruch.

Ist $k \geq 2$, so gilt $b_1 \cdot b_2 = b_2 \cdot b_1$. Dabei fassen wir die ersten Faktoren auf beiden Seiten als Koeffizienten aus $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^n]$ und die zweiten als Elemente des Moduls $\Im\mathfrak{Z}^n$ auf. Die Elemente b_1 und b_2 sind also linear abhängig. Widerspruch. $\square$

4.3 Berechnung der Alexanderinvarianten

Sei X ein entsprechend Lemma 4.1 konstruierter CW-Komplex zur gegebenen Präsentation von $\mathfrak{L}$. P sei die einzige 0-Zelle von X. Wir betrachten die maximale abelsche Überlagerung $\widehat{X} \to X$. $\widehat{P}$ sei ein Punkt über P.

Wir werden nun die Moduln $H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c})$ und $H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)})$ vergleichen. Es gilt $H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c}) \cong G'_{\mathfrak{L}}/G''_{\mathfrak{L}} \cong \pi_1(\widehat{X})/\pi_1(\widehat{X})' \cong H_1(\widehat{X})$.

Die lange exakte Homologiesequenz des Paares $(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)})$, vergleiche (25), sieht in diesem konkreten Fall nach Ersetzen von $H_1(\widehat{X})$ durch $H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c})$ wie folgt aus:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c}) \arrow[r, "\alpha"] & H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)}) \arrow[r, "\partial"] & H_0(\widehat{X}^{(0)}) \arrow[r] & H_0(\widehat{X}) \\
 & & & \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa] \arrow[u, "1\mapsto\widehat{P}", "\cong"'] \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[u, "1\mapsto\widehat{P}", "\cong"']
\end{tikzcd} \tag{30}$$

Die Sequenz (26) sieht jetzt so aus:

$$0 \longrightarrow H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c}) \xrightarrow{\alpha} H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)}) \xrightarrow{\beta} \Im\mathfrak{Z}^\kappa \longrightarrow 0 \tag{31}$$

Wir betrachten zuerst den Fall $\kappa = 1$, d. h. $\mathfrak{L}$ ist ein Knoten. In diesem Fall ist $\Im\mathfrak{Z}^\kappa$ frei und daher spaltet (31), d. h. wir finden eine Abbildung $\sigma\colon \Im\mathfrak{Z} \to H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)})$ mit $\beta \circ \sigma = id$. Es folgt $H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)}) = \alpha(H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c})) \oplus \sigma(\Im\mathfrak{Z})$, denn zum einen gilt $\alpha(H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c})) \cap \sigma(\Im\mathfrak{Z}) = 0$ und zum anderen finden wir für $h \in H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)})$ wie folgt eine Zerlegung: Es gilt $h - \sigma \circ \beta(h) \in \ker(\beta) = \operatorname{im}(\alpha)$. Also existiert $g \in H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c})$ mit $\alpha(g) = h - \sigma \circ \beta(h)$. Damit gilt $h = \alpha(g) + \sigma(\beta(h))$.

Sei $k \in \{1, \ldots, m\}$. Wir wollen nun versuchen σ so zu wählen, dass $\sigma(\Im\mathfrak{Z}) = \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}] \cdot [\widehat{x}_k]$. Dabei bezeichnet $\widehat{x}_k \in C_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)})$ die Hochhebung der 1-Zelle x_k von X zum Anfangspunkt $\widehat{P}$. Wir müssen dem Erzeuger $(t-1)$ von $\Im\mathfrak{Z}$ ein Bild zuordnen. Wir bezeichnen entsprechend Lemma 2.15 die von x_k induzierte Deckbewegung aus $\mathcal{D}_{\widehat{X}}$ mit t und identifizieren so $\mathfrak{Z}$ und $\mathcal{D}_{\widehat{X}}$. Wir definieren $\sigma(t-1) := [\widehat{x}_k]$. Es gilt $\partial([\widehat{x}_k]) = (t-1)\widehat{P}$ und daher auch $\beta([\widehat{x}_k]) = t - 1$. Schließlich folgt $\beta \circ \sigma = id$.

Nun können wir in der Matrix $\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\varphi}_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}}$ die k-te Spalte streichen und erhalten dabei eine Präsentationsmatrix von $H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c}) \cong \alpha(H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c}))$.

Beweis: Sei zum Beispiel $k = m$. $\alpha(H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c}))$ ist also der Untermodul von $H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)})$, der von den Elementen $[\widehat{x}_1], \ldots, [\widehat{x}_{m-1}] \in H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)})$ aufgespannt wird.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]^m \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "e_i\mapsto e_i", "e_n\mapsto 0"'] & H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)}) \arrow[r] \arrow[d, "pr"] & 0 \\
\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]^n \arrow[ur, "A"] \arrow[r, "A'"] & \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]^{m-1} \arrow[r, "\psi'"] & \alpha(H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c})) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wir setzen $A := \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\varphi}_{\substack{j=1,\ldots,m\\ i=1,\ldots,n}}$ und $A' := \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\varphi}_{\substack{j=1,\ldots,m-1\\ i=1,\ldots,n}}$. Mit pr bezeichnen wir die Projektion auf den Unterraum. ψ ist gegeben durch $\psi(e_i) := [\widehat{x}_i]$

für $i \leq m$ und ψ' durch $\psi'(e_i) := [\widehat{x}_i]$ für $i \leq m-1$. Das Diagramm ist kommutativ.

Nun zur Begründung der Exaktheit der unteren Zeile:

- ψ' ist surjektiv.
- $\psi' \circ A' = pr \circ \psi \circ A = 0$. Also gilt $\operatorname{im}(A') \subset \ker(\psi')$.
- Sei $g' \in \ker(\psi')$. Es existiert genau ein Urbild g von g' in $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]^m$, dessen letzte Koordinate bzgl. der Basis $e_1, \ldots, e_m$ Null ist. Nun gilt $\psi(g) = 0$. Also existiert $h \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]^n$ mit $A \cdot h = g$. Es folgt $A' \cdot h = g'$.

Wir haben den folgenden Satz bewiesen.

Satz 4.15 *Es sei $\mathfrak{L}$ ein Knoten. Streicht man eine beliebige Spalte der Matrix $\varphi \circ \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$, so erhält man eine Präsentationsmatrix des Alexandermoduls von $\mathfrak{L}$. Dabei ist der Ringhomomorphismus φ gegeben durch*

$$\varphi\colon \mathbb{Z}[\langle x_1, \ldots, x_m \rangle] \to \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}], \quad x_i \mapsto t.$$

Der Fall $\kappa > 1$ ist schwieriger. Im Allgemeinen spaltet (31) nicht und $H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c})$ ist nicht einfach ein Untermodul, der von einem Teil der Basis $[\widehat{x}_1], \ldots, [\widehat{x}_m]$ von $H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)})$ erzeugt wird.

Definition 4.16 *Für $k \in \mathbb{N}$ setze*

$$\Delta_k^{CW}(\mathfrak{L}) := \Delta_k(H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)})) \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]/\pm\mathfrak{Z}^\kappa.$$

Satz 4.17 *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\Delta_k(\mathfrak{L}) = \Delta_{k+1}^{CW}(\mathfrak{L})$.*

Allgemeiner gilt in der Situation von Abschnitt 4.1, falls $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$ ein Integritätsring ist,

$$\Delta_k(H_1(\widetilde{X})) = \Delta_{k+1}(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

BEWEIS: Für Knoten folgt aus Satz 4.15 $\Delta_k(\mathfrak{L}) = \Delta_{k+1}^{CW}(\mathfrak{L})$ für $k \in \mathbb{N}$.

Nun zum Beweis der allgemeinen Version. Laut Lemma 1.16 genügt es zu zeigen, dass die Torsionsmoduln der $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$-Moduln $H_1(\widetilde{X})$ und $H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})$ isomorph sind und dass gilt $\operatorname{rk} H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)}) = \operatorname{rk}(H_1(\widetilde{X})) + 1$.

Wir beweisen zunächst $\operatorname{Tors}_{\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]}(H_1(\widetilde{X})) \cong \operatorname{Tors}_{\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]}(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)}))$. Betrachte die Sequenz (25). Es gilt $\operatorname{Tors}(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})) \subset \ker \partial$, denn: Sei $h \in H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})$ mit $\partial h \neq 0$. Für alle $p \in \mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$ folgt daraus $\partial ph = p \cdot \partial h \neq 0$ und somit $ph \neq 0$. Es gilt $\ker \partial = \operatorname{im} \alpha \cong H_1(\widetilde{X})$. Nun folgt $\operatorname{Tors}(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})) = \operatorname{Tors}(\ker \partial) \cong \operatorname{Tors}(H_1(\widetilde{X}))$.

Um $\operatorname{rk} H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)}) = \operatorname{rk} H_1(\widetilde{X}) + 1$ zu zeigen, tensorieren wir (31) über $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$ mit $Q(\mathcal{D}_{\widetilde{X}})$, wobei $Q(\mathcal{D}_{\widetilde{X}})$ den Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]$ bezeichne. Es gilt $Q(\mathcal{D}_{\widetilde{X}}) \otimes_{\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{X}}]} \Im\mathcal{D}_{\widetilde{X}} = Q(\mathcal{D}_{\widetilde{X}})$. Somit folgt aus der Dimensionsformel[18] für lineare Abbildungen

$$\operatorname{rk}_{Q(\mathcal{D}_{\widetilde{X}})} H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)}) = \operatorname{rk}_{Q(\mathcal{D}_{\widetilde{X}})} H_1(\widetilde{X}) + \operatorname{rk}_{Q(\mathcal{D}_{\widetilde{X}})} Q(\mathcal{D}_{\widetilde{X}})$$

Damit ist Satz 4.17 bewiesen. □

Beispiel 4.18 *Sei $\mathfrak{L} = S^1 \times \{1, \ldots, \kappa\} \subset \mathbb{R}^3$ die triviale Verschlingung mit κ Komponenten. Dann gilt $\Delta_k(\mathfrak{L}) = 0$, falls $k < \kappa - 1$.*

Beweis: $\langle x_1, \ldots, x_\kappa \mid \rangle$ ist eine Wirtingerpräsentation von $\mathfrak{L}$. Als Präsentation der Gruppe von $\mathfrak{L}$ benutzen wir $\langle x_1, \ldots, x_{\kappa+1} \mid r_1 \rangle$ wobei $r_1 := x_{\kappa+1}$. Nun gilt

$$\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1 \\ j=1,\ldots,\kappa+1}} = (0, \ldots, 0, 1) \in Mat(1, \kappa+1).$$

Also folgt die Behauptung:

$$\Delta_k(\mathfrak{L}) = \Delta_{k+1}\big((0, \ldots, 0, 1)\big) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k < \kappa - 1 \\ \pm 3^\kappa & \text{falls } k \geq \kappa - 1 \end{cases}$$

□

[18] Für Vektorräume V und W und $f \in Hom(V, W)$ gilt $\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$.

5 Seifertflächen und Seifertmatrizen

Sei $\mathfrak{L} \subset S^3$ eine Verschlingung.

5.1 Seifertflächen

Definition 5.1 *Eine **Seifertfläche** für $\mathfrak{L}$ ist eine zusammenhängende, kompakte, berandete, orientierte, 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit $F \subset S^3$, so dass $\partial F = \mathfrak{L}$ und die von F auf ∂F induzierte Orientierung mit der von $\mathfrak{L}$ übereinstimmt.*

*Ein **bi-Kragen** von F ist eine Einbettung*

$$\imath\colon F \times]-1,1[\to S^3 \text{ bzw. } \mathbb{R}^3$$

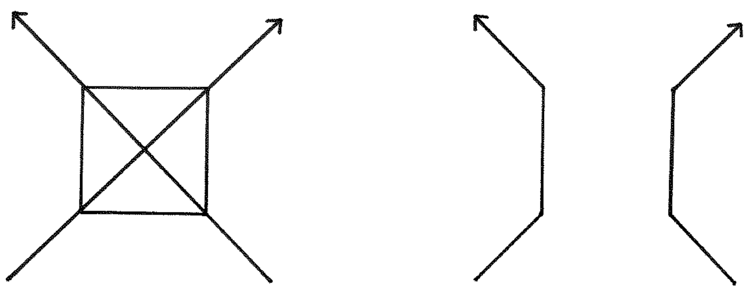
mit $\imath(x,0) = x$ für alle $x \in F$.

Satz 5.2 *Für $\mathfrak{L}$ gibt es eine Seifertfläche mit bi-Kragen.*

Konstruktion: Sei $\mathfrak{L} \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mathfrak{L}$ polygonal ist. Sind nämlich zwei Verschlingungen ambient isotop und für eine ist eine Seifertfläche gegeben, dann erhalten wir mit Hilfe des Homöomorphismus h_1 aus Definition 2.2 eine Seifertfläche für die andere Verschlingung.

Wir wählen eine reguläre Projektion $p\colon \mathbb{R}^3 \to E$ von $\mathfrak{L}$ und eine Blickrichtung. Wir können annehmen, dass $p(\mathfrak{L})$ zusammenhängend ist: Wir können die Komponenten der Verschlingung $\mathfrak{L}$ so zu einer zu $\mathfrak{L}$ ambient isotopen Verschlingung $\mathfrak{L}'$ „zusammenschieben“, dass p eine reguläre Projektion von $\mathfrak{L}'$ ist und dass $p(\mathfrak{L}')$ zusammenhängend ist.

Wir trennen nun jede Kreuzung von $p(\mathfrak{L})$ auf und verbinden entsprechend den Orientierungen neu:

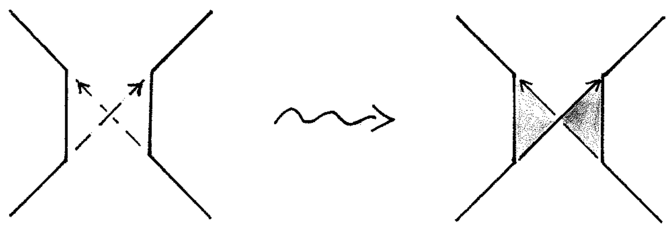


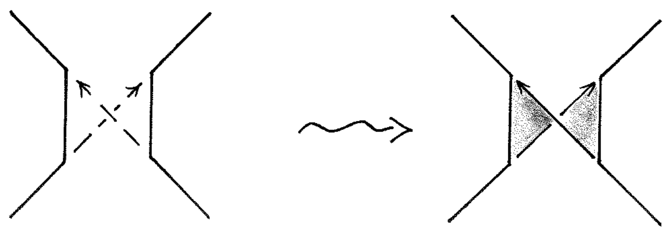
Wir zeichnen wie in der Abbildung ein Rechteck an die Kreuzung und radieren die Diagonalen aus. Wir entfernen auch die Kanten des Rechtecks, auf denen keine Orientierung induziert wird. So erhalten wir endlich viele disjunkte und einfach geschlossene[19] Wege $c_1, \ldots, c_s$ in E ($s \in \mathbb{N}$).

[19]Ein Weg $c\colon [0,1] \to X$ heißt einfach geschlossen, falls $c(0) = c(1)$ und $c|_{[0,1[}$ injektiv ist.

Der Weg c_i ($i \in \{1, \dots, s\}$) berandet eine Fläche D_i, die homöomorph zur Kreisscheibe ist. Die Flächen $D_1, \dots, D_s$ verschieben wir senkrecht zu E, um sie disjunkt zu machen. Dies tun wir so, dass eine Fläche D_{kl}, die ursprünglich in einer anderen Fläche D_{gr} lag, danach über D_{gr} liegt.

Die Anzahl der zuvor aufgetrennten Kreuzungen sei $k \in \mathbb{N}$. An jeder Stelle, wo sich eine Kreuzung befunden hat, verbinden wir mit einem verdrehten Streifen Tw_j ($j \in \{1, \dots, k\}$) die beiden angrenzenden Flächen:





F sei die Vereinigung der disjunkten D_i und der eingefügten Streifen Tw_j. Die Streifen Tw_j haben wir so an die Flächen D_i geklebt, dass ∂F und $\mathfrak{L}$ ambient isotop sind.

Die Fläche F ist kompakt, da sie als endliche Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen entstanden ist.

F ist zusammenhängend, da $p(\partial F)$ zusammenhängend ist und außerdem laut Konstruktion für je zwei Punkte $x, y \in \partial F$ mit $p(x) = p(y)$ gilt, dass x und y durch einen Weg in F verbunden werden können.

F ist orientiert, da F aus orientierten Flächenstücken durch mit den Orientierungen verträgliches Verkleben entstanden ist.

Anhand der Konstruktion sieht man auch, dass F eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, für die es einen bi-Kragen gibt.

∂F und $\mathfrak{L}$ sind ambient isotop. Es existiert also ein Homöomorphismus $h_1 \colon S^3 \to S^3$ mit $h_1(\partial F) = \mathfrak{L}$. Daher ist $h_1(F)$ eine Seifertfläche für $\mathfrak{L}$. $\square$

5.2 Konstruktion einer unendlich zyklischen Überlagerung

Sei $\mathfrak{L} \subset S^3$ eine Verschlingung und F eine Seifertfläche für $\mathfrak{L}$ mit bi-Kragen $\imath\colon F \times]-1,1[\to S^3$. Wir legen einige Bezeichnungen fest.

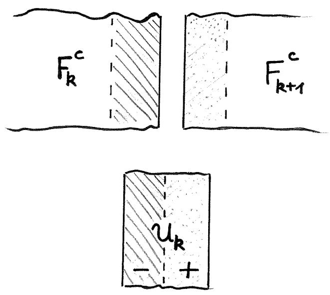
$$\begin{aligned} \mathring{F} &:= F \backslash \mathfrak{L} \\ F^c &:= S^3 \backslash F \\ U &:= \imath(\mathring{F} \times]-1,1[) \\ U^- &:= \imath(\mathring{F} \times]-1,0[) \\ U^+ &:= \imath(\mathring{F} \times]0,1[) \end{aligned}$$

Seien $M \in \{F^c, U, U^-, U^+\}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} M_k &:= M \times \{k\} \\ \widetilde{M} &:= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} M_k \qquad \text{(disjunkte Vereinigung)} \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Räume F^c_k mit Hilfe der U_k zusammenkleben. Dazu definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\widetilde{F^c} \amalg \widetilde{U}$:
Für $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in U^-$ identifizieren wir $(x,k) \in F^c_k$ mit $(x,k) \in U_k$. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in U^+$ identifizieren wir $(x, k+1) \in F^c_{k+1}$ mit $(x,k) \in U_k$.

$$\widetilde{\mathfrak{L}^c} := \widetilde{F^c} \amalg \widetilde{U} / \sim$$



Lemma 5.3 *$\widetilde{\mathfrak{L}^c}$ ist eine wegzusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Abbildung*

$$p\colon \widetilde{\mathfrak{L}^c} \to \mathfrak{L}^c \quad (x,k) \mapsto x$$

ist eine normale Überlagerung (weil $\mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}^c}}$ transitiv auf $\widetilde{\mathfrak{L}^c}$ operiert). Es gilt $\mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}^c}} \cong \mathfrak{Z} \cong \mathbb{Z}$.

Die Abbildung $t\colon \widetilde{\mathfrak{L}^c} \to \widetilde{\mathfrak{L}^c} \quad (x,i) \mapsto (x, i+1)$ ist ein Erzeuger von $\mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}^c}}$.

Wir identifizieren $\mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}^c}}$ mit $\mathfrak{Z}$.

Definition 5.4 *$\widetilde{\mathfrak{L}^c}$ heißt die unendlich zyklische Überlagerung von $\mathfrak{L}^c$ zur Seifertfläche F.*

Lemma 5.5 *Falls $\mathfrak{L}$ ein Knoten ist, so ist $\widetilde{\mathfrak{L}^c}$ die unendlich zyklische Überlagerung aus Abschnitt 2.3.*

Beweis: Sei $x_0 \in \mathfrak{L}^c$ und $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Laut Lemma 2.13 existiert eine Abbildung φ, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathfrak{L}^c, x_0) \arrow[r, "pr"] \arrow[d, "ab"'] & \pi_1(\mathfrak{L}^c, x_0)/\pi_1(p)\big(\pi_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c}, \widetilde{x}_0)\big) \\
Ab(\pi_1(\mathfrak{L}^c, x_0)) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

φ ist surjektiv, da pr surjektiv ist. Wegen der Surjektivität von φ und weil $Ab(\pi_1(\mathfrak{L}^c, x_0))$ und $\pi_1(\mathfrak{L}^c, x_0)/\pi_1(p)\big(\pi_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c}, \widetilde{x}_0)\big) \cong \mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}^c}}$ freie abelsche Gruppen mit einem Erzeuger sind, ist φ auch injektiv. Nun gilt

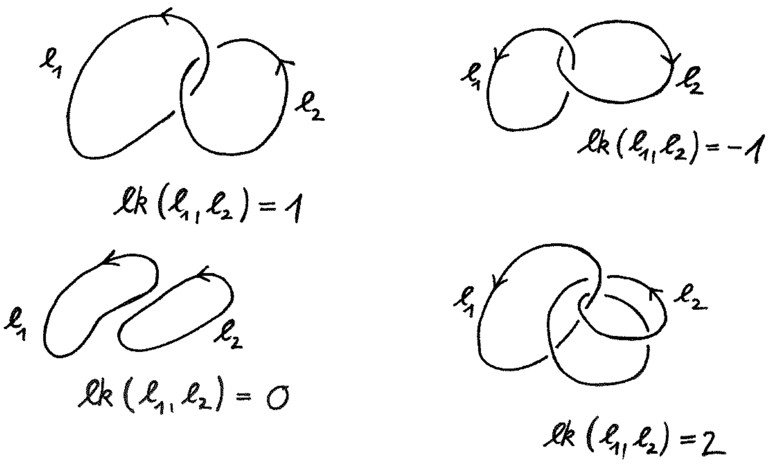
$$\pi_1(\mathfrak{L}^c, x_0)' = \ker(ab) = \ker(\varphi \circ ab) = \ker(pr) = \pi_1(p)\big(\pi_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c}, \widetilde{x}_0)\big)$$

und mit Satz 2.16 folgt die Behauptung. $\square$

5.3 Verschlingungszahlen

Seien ℓ_1 und ℓ_2 zwei disjunkte und einfach geschlossene Wege in $\mathbb{R}^3 \subset S^3$. Wir können ℓ_1 und ℓ_2 auch als Abbildungen $S^1 \to \mathbb{R}^3$ auffassen, d. h. ℓ_1 und ℓ_2 sind Knoten (allerdings möglicherweise nicht zahm). Wie üblich setzen wir $\mathfrak{L}_i := \ell_i(S^1)$ für $i \in \{1, 2\}$.

Wir wollen die Verschlingungszahl $lk(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}$ von ℓ_1 und ℓ_2 definieren.



Man kann $lk(\ell_1, \ell_2)$ auf verschiedene Weise definieren. Es folgt eine Auswahl möglicher Definitionen. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass $\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2$ zahm ist.

1. Sei $[\ell_1]$ die Äquivalenzklasse von ℓ_1 in $H_1(\mathfrak{L}_2^c) \cong \mathfrak{Z}$. Wir haben in Abschnitt 2.2 gesehen, dass sämtliche Erzeuger sämtlicher Wirtinger-präsentationen von ℓ_2 den gleichen Erzeuger $t \in H_1(\mathfrak{L}_2^c)$ repräsentieren. Es gibt genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $[\ell_1] = n \cdot t$. Wir definieren $lk_1(\ell_1, \ell_2) := n$.

2. Sei $x_0 \in \mathfrak{L}_1 \subset S^3$. Der Weg ℓ_1 repräsentiert ein Element $\ell_{1x_0} \in \pi_1(\mathfrak{L}_2^c, x_0)$. $\psi\colon Ab(\pi_1(\mathfrak{L}_2^c, x_0)) \to H_1(\mathfrak{L}_2^c)$ sei der Isomorphismus aus Lemma 2.14. Sei $\tau := \psi^{-1}(t)$. Es gibt genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $ab(\ell_{1x_0}) = n \cdot \tau$. Wir definieren $lk_2(\ell_1, \ell_2) := n$.

   Wegen $\psi(ab(\ell_{1x_0})) = [\ell_1]$ gilt $lk_1(\ell_1, \ell_2) = lk_2(\ell_1, \ell_2)$.

3. Sei F eine Seifertfläche für $\mathfrak{L}_2$ mit orientierungserhaltendem[20] bi-Kragen $\imath\colon F \times]-1,1[\to \mathbb{R}^3$. F sei so beschaffen, dass ℓ_1 die Seifertfläche F nur in endlich vielen Punkten schneidet, und zwar stets transversal, d.h. für jeden Schnittpunkt existiert ein kleines Intervall $[a, b]$ und $c \in]a, b[$ mit $\ell_1(c) \in F$, $\ell_1([a, c[) \subset U^+$ und $\ell_1(]c, b]) \subset U^-$ oder umgekehrt. Wir benutzen hier die Bezeichnungen aus Abschnitt 5.2. Wir durchlaufen ℓ_1 genau einmal entsprechend der Orientierung. Dabei durchstoßen wir F p-mal von U^- nach U^+ und n-mal von U^+ nach U^-. Wir definieren $lk_3(\ell_1, \ell_2) := p - n$.

4. Es seien eine reguläre Projektion $p\colon \mathbb{R}^3 \to E$ bzgl. der Verschlingung $\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2$ und eine Blickrichtung auf p gegeben. In Abbildung 3 (Abschnitt 2.2) haben wir jeder Kreuzung ein Vorzeichen zugeordnet. Wir definieren $lk_4(\ell_1, \ell_2)$ als Summe der Vorzeichen der Kreuzungen, an denen ℓ_2 von ℓ_1 unterkreuzt wird.

5. Sei $p\colon \widetilde{\mathfrak{L}_2^c} \to \mathfrak{L}_2^c$ die unendlich zyklische Überlagerung von $\mathfrak{L}_2^c$ bzgl. einer Seifertfläche F mit orientierungserhaltendem bi-Kragen. Sei $t \in \mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}_2^c}}$ der in Lemma 5.3 erwähnte Erzeuger der Gruppe der Deckbewegungen. Seien $x_0 \in \mathfrak{L}_1$ und $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x)$. Wir können ℓ_1 zu einem Weg $\widetilde{\ell_1}$ in $\widetilde{\mathfrak{L}_2^c}$ mit Anfangspunkt $\widetilde{x}_0$ hochheben. $\widetilde{x}_1$ sei der Endpunkt von $\widetilde{\ell_1}$. Es gibt genau ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $t^m(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_1$. Wir definieren $lk_5(\ell_1, \ell_2) := m$.

Es ist nicht a priori klar, dass die Definitionen von lk_3 und lk_4 nicht von der gewählten Seifertfläche bzw. der gewählten Projektion abhängen.

[20] F, $]-1,1[$ und $\mathbb{R}^3$ sind orientiert. $F \times]-1,1[$ erbt eine Orientierung von den beiden Faktoren. $\imath$ ist lokal ein Homöomorphismus. Der bi-Kragen $\imath$ ist also entweder orientierungserhaltend oder -umkehrend.

Satz und Definition 5.6 *Für $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$ gilt $lk_i(\ell_1, \ell_2) = lk_j(\ell_1, \ell_2)$. Wir definieren die* ***Verschlingungszahl*** *von ℓ_1 und ℓ_2 durch*

$$lk(\ell_1, \ell_2) := lk_1(\ell_1, \ell_2).$$

Beweis: Wir haben bei der Definition von $lk_2(\ell_1, \ell_2)$ gesehen, dass gilt $lk_1(\ell_1, \ell_2) = lk_2(\ell_1, \ell_2)$.

Nun wollen wir beweisen, dass gilt $lk_2(\ell_1, \ell_2) = lk_5(\ell_1, \ell_2)$. Sei $x_0 \in \mathfrak{L}_1$. Es gilt $Ab(\pi_1(\mathfrak{L}_2^c, x_0)) \cong \mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}_2^c}}$. Das Element $ab(\ell_{1x_0})$ entspricht $t^m \in \mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}_2^c}}$ und $\tau \in Ab(\pi_1(\mathfrak{L}_2^c, x_0))$ entspricht $t \in \mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}_2^c}}$. Es folgt $lk_2(\ell_1, \ell_2) = m = lk_5(\ell_1, \ell_2)$.

Jetzt beweisen wir $lk_3(\ell_1, \ell_2) = lk_5(\ell_1, \ell_2)$. Gegeben ist eine Seifertfläche F für $\mathfrak{L}_2$ mit orientierungserhaltendem bi-Kragen. Wir benutzen die Bezeichnungen aus Abschnitt 5.2. Wir wählen $x_0 \in \mathfrak{L}_1 \backslash F$ und $\widetilde{x}_0 := (x_0, 0) \in F_0^c$. Das Durchstoßen der Seifertfläche F von U^- nach U^+ mit ℓ_1 entspricht einem Übergang der Hochhebung $\widetilde{\ell_1}$ von F_i^c nach F_{i+1}^c für ein $i \in \mathbb{Z}$. Ebenso entspricht das Durchstoßen der Seifertfläche von U^+ nach U^- mit ℓ_1 dem Übergang der Hochhebung $\widetilde{\ell_1}$ von F_i^c nach F_{i-1}^c für ein $i \in \mathbb{Z}$. Der Endpunkt von $\widetilde{\ell_1}$ ist also $(x_0, lk_3(\ell_1, \ell_2))$. Nun gilt $(x_0, lk_3(\ell_1, \ell_2)) = t^m(\widetilde{x}_0) = (x_0, m) = (x_0, lk_5(\ell_1, \ell_2))$. Es folgt also $lk_3(\ell_1, \ell_2) = lk_5(\ell_1, \ell_2)$. Außerdem ist nun klar, dass $lk_3(\ell_1, \ell_2)$ nicht von der Wahl der Seifertfläche abhängt.

Abschließend beweisen wir $lk_3(\ell_1, \ell_2) = lk_4(\ell_1, \ell_2)$. Zur regulären Projektion p bzgl. $\mathfrak{L}_2$ aus der Definition von lk_4 konstruieren wir eine Seifertfläche für ℓ_2 (vgl. Abschnitt 5.2). Dabei achten wir darauf, dass ℓ_1 und F sich stets transversal schneiden. Dann gehen wir von ℓ_1 zu einem in $\mathfrak{L}_2^c$ zu ℓ_1 homotopen, einfach geschlossenen Weg ℓ_1' über, der bzgl. der gewählten Blickrichtung stets über F verläuft außer in der Nähe der Kreuzungen, an denen ℓ_2 von ℓ_1 unterkreuzt wird. Wir beobachten, dass sich die Verschlingungszahlen dabei nicht ändern, d. h. $lk_3(\ell_1', \ell_2) = lk_3(\ell_1, \ell_2)$ und $lk_4(\ell_1', \ell_2) = lk_4(\ell_1, \ell_2)$. Nun durchstößt ℓ_1 die Seifertfläche F genau einmal in der Nähe jeder Unterkreuzung von ℓ_1 unter ℓ_2 und sonst nirgendwo. Dabei durchstößt ℓ_1 die Fläche F in der Nähe einer Kreuzung mit positivem Vorzeichen von U^- nach U^+ und bei einer Kreuzung mit negativem Vorzeichen wird F von U^+ nach U^- durchstoßen. Aus den Definitionen folgt nun $lk_3(\ell_1', \ell_2) = lk_4(\ell_1', \ell_2)$ und damit auch $lk_3(\ell_1, \ell_2) = lk_4(\ell_1, \ell_2)$. □

Satz 5.7

$$lk(\ell_1, \ell_2) = lk(\ell_2, \ell_1) \tag{32}$$

$$lk(-\ell_1, \ell_2) = -lk(\ell_1, \ell_2) \tag{33}$$

Dabei bezeichnet $-\ell_1$ den Knoten, der aus ℓ_1 durch Umkehrung der Orientierung entsteht.

Beweis: Die Gleichung (33) erhält man leicht für lk_3 und für lk_4.

Wir beweisen nun (32) für lk_4. Dazu seien eine reguläre Projektion für $\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2$ und eine Blickrichtung gegeben. Seien $i, j \in \{1, 2\}$ mit $i \neq j$. Sei $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Wir bezeichnen die Anzahl der Kreuzungen mit Vorzeichen ε, an denen ℓ_j von ℓ_i unterkreuzt wird mit $Anz(\ell_i \text{ unter } \ell_j, \varepsilon)$. Sinngemäß definieren wir $Anz(\ell_i \text{ über } \ell_j, \varepsilon)$.

ℓ_1 kreuzt ℓ_2 genau so oft von rechts nach links, wie von links nach rechts. Mit den gerade eingeführten Bezeichnungen folgt daraus:

$$\begin{aligned}
&Anz(\ell_1 \text{ unter } \ell_2, +) + Anz(\ell_2 \text{ unter } \ell_1, -)\\
=&Anz(\ell_1 \text{ unter } \ell_2, +) + Anz(\ell_1 \text{ über } \ell_2, -)\\
=&\text{ Anzahl der Kreuzungen mit } \ell_1 \text{ kreuzt } \ell_2 \text{ von rechts nach links}\\
=&\text{ Anzahl der Kreuzungen mit } \ell_1 \text{ kreuzt } \ell_2 \text{ von links nach rechts}\\
=&Anz(\ell_1 \text{ unter } \ell_2, -) + Anz(\ell_1 \text{ über } \ell_2, +)\\
=&Anz(\ell_1 \text{ unter } \ell_2, -) + Anz(\ell_2 \text{ unter } \ell_1, +)
\end{aligned}$$

Es folgt für die zu berechnenden Verschlingungszahlen

$$\begin{aligned}
lk_4(\ell_1, \ell_2) &= Anz(\ell_1 \text{ unter } \ell_2, +) - Anz(\ell_1 \text{ unter } \ell_2, -)\\
&= Anz(\ell_2 \text{ unter } \ell_1, +) - Anz(\ell_2 \text{ unter } \ell_1, -)\\
&= lk_4(\ell_2, \ell_1).
\end{aligned}$$

□

5.4 Seifertmatrizen

Wir machen in diesem Abschnitt Gebrauch von der Klassifikation der geschlossenen Flächen. Vergleiche z. B. [8] Kapitel 1.

Sei ℓ eine polygonale Verschlingung mit κ Zusammenhangskomponenten und $\mathfrak{L} := \ell(S^1 \amalg \cdots \amalg S^1) \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3$. Es seien eine reguläre Projektion $p\colon \mathbb{R}^3 \to E$ bzgl. $\mathfrak{L}$ und eine Blickrichtung auf p gewählt.

F sei die in Abschnitt 5.1 zu p und zur Blickrichtung konstruierte Seifertfläche für $\mathfrak{L}$. F sei vom Geschlecht[21] $g \in \mathbb{N}$. Als berandete Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist F homöomorph zur abgebildeten Fläche F'.

Die Abbildung 4 ist so zu verstehen, dass F' aus dem abgebildeten $4g$-Eck mit κ Löchern entsteht, indem man für $i \in \{1, \dots, 2g\}$ die beiden Kanten, die mit a'_i bezeichnet sind, entsprechend der angedeuteten Durchlaufrichtungen identifiziert. Die Kanten $a'_1, \dots, a'_{2g}$ werden so zu geschlossenen Wegen in $\mathring{F}' := F' \backslash \partial F'$.

Mit $a_1, \dots, a_{2g}$ bezeichnen wir die geschlossenen Wege in $\mathring{F}$, die unter dem Homöomorphismus zwischen F' und F den Wegen $a'_1, \dots, a'_{2g}$ entsprechen. Die Wege $c'_1, \dots, c'_\kappa$ entsprechen analog Wegen $c_1, \dots, c_\kappa$ in $\partial F \subset F$.

[21] Das Geschlecht von S^2 ist 0. Der Torus ist vom Geschlecht 1 und die zusammenhängende Summe von n Tori ($n \geq 2$) hat das Geschlecht n. Entfernt man aus einer Fläche endlich viele Kreisscheiben, so ordnet man der neuen, berandeten Fläche das gleiche Geschlecht zu wie der ursprünglichen, unberandeten Fläche.

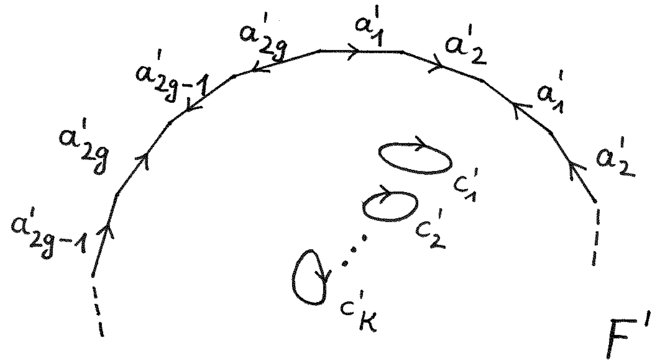


Abbildung 4: zur Seifertfläche F homöomorphe Fläche F'

$c_1, \ldots, c_\kappa$ sind die einzelnen Knoten der Verschlingung ℓ. Wir können den Homomorphismus zwischen F und F' so wählen, dass die Wege $a_1, \ldots, a_{2g}$ endliche Streckenzüge sind.

Sei $\imath\colon F \times]-1,1[\to \mathbb{R}^3$ ein orientierungserhaltender bi-Kragen von F. Wir benutzen wieder die Bezeichnungen aus Abschnitt 5.2.

Wir definieren nun Abbildungen, mit denen wir Punkte und Wege aus der Seifertfläche F hinaus nach U^+ bzw. U^- verschieben können.

$$\begin{array}{rcl} \square^\pm\colon F & \hookrightarrow & F \times]-1,1[\overset{\imath}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (x, \pm\frac{1}{2}) \end{array}$$

Für $i \in \{1, \ldots, 2g\}$ setzen wir $a_i^\pm := \square^\pm \circ a_i$ und $c_i^\pm := \square^\pm \circ c_i$. Wir setzen außerdem

$$b_i^{(\pm)} := \begin{cases} a_i^{(\pm)} & \text{falls } i \in \{1, \ldots, 2g\} \\ c_{i-2g}^{(\pm)} & \text{falls } i \in \{2g+1, \ldots, 2g+\kappa\} \end{cases}$$

und $n := 2g + \kappa - 1$.

Die Homologieklassen von $b_1, \ldots, b_n$ bilden eine Basis von $H_1(F)$, wie wir in Lemma 5.9 sehen werden.

Definition 5.8 *Sei $b_1, \ldots, b_n$ ein System von geschlossenen Wegen, deren Homologieklassen eine Basis von $H_1(F)$ bilden. Außerdem sei für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die aus b_i^+ und b_j gebildete Verschlingung zahm. Im Fall $n > 0$ definieren wir die **Seifertmatrix** S bzgl. des Systems $b_1, \ldots, b_n$ durch*

$$S := \big(lk(b_i^+, b_j)\big)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} \in Mat_{\mathbb{Z}}(n,n).$$

Aus Abbildung 4 kann man die Seifertmatrix nicht ablesen, da nicht zu erkennen ist, wie F in $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist.

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass die Matrix $A := S^T - t \cdot S$ über $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]$ eine Präsentationsmatrix des $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]$-Moduls $H_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c})$ ist. Für Knoten erhalten wir dann mit Lemma 5.5 $\Delta_k(\mathfrak{L}) = \Delta_k(A)$. Allgemein werden wir zeigen, dass gilt $\widetilde{\Delta}_k(\mathfrak{L}) = \Delta_k(A)$.

5.5 Berechnung der reduzierten Alexanderpolynome

Wir benutzen weiterhin die Bezeichnungen des letzten Abschnitts. Ist w ein geschlossener Weg in einem topologischen Raum X, so bezeichnen wir mit $[w]_X \in H_1(X)$ die Homologieklasse von w in X. Sei $Y \subset X$. Dann bezeichnet $\overline{Y}$ den topologischen Abschluss der Menge Y in X.

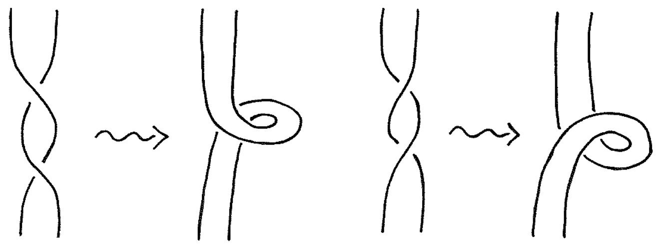
Sei $x_0 \in F$ der gemeinsame Basispunkt der Wege $a_1, \ldots, a_{2g}$. Für $i \in \{1, \ldots, \kappa - 1\}$ wählen wir induktiv einen einfach geschlossenen Weg a_{2g+i} in $\left(\mathring{F} \backslash \bigcup_{i=1}^{2g+i-1} \operatorname{im}(a_i)\right) \cup \{x_0\}$ mit Basispunkt x_0, der in F geschlossen homotop[22] zu c_i ist. Da $\mathfrak{L}$ polygonal ist, können wir die Wege a_{2g+i} als endliche Streckenzüge wählen. Wir setzen $X := \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{im} a_i$ wobei $n := 2g + \kappa - 1$.

Wir wollen die Seifertfläche F auf eine Umgebung der Wege $a_1, \ldots, a_n$ zurückziehen. Für $\delta > 0$ und $x \in F$ setzen wir $B_\delta(x) := \{y \in \mathring{F} \mid d(x,y) < \delta\}$. Hier bezeichnet d die euklidische Metrik von $\mathbb{R}^3$. Wir können annehmen, dass für den Basispunkt x_0 ein $\delta_1 > 0$ existiert, so dass die reguläre Projektion p eingeschränkt auf $B_{2\delta_1}(x_0)$ injektiv ist, dass gilt $d(\partial F, \overline{B_{\delta_1}(x_0)}) > 0$ und dass der Weg a_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) sich in genau zwei Punkten mit dem Ball $B_{\delta_1}(x_0)$ schneidet. Es gibt $\delta_2 > 0$, so dass $3\delta_2$ größer als der minimale Abstand zwischen irgend zwei der n Komponenten von $X \backslash B_{\delta_1}(x_0)$ ist und dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ der Abstand zwischen Ein- und Austrittspunkt des Weges a_i in bzw. aus dem Ball $B_{\delta_1}(x_0)$ ebenfalls größer als $3\delta_2$ ist.

$$\begin{aligned} \dot{F} &:= \overline{B_{\delta_1}(x_0)} \cup \{x \in F \mid d(x, X) \leq \delta_2\} \\ B_i &:= \{x \in F \backslash B_{\delta_1}(x_0) \mid d(x, \operatorname{im}(a_i)) \leq \delta_2\} \quad \text{für } i \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Es gilt $\dot{F} = \overline{B_{\delta_1}(x_0)} \cup \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Man kann erreichen, dass sich in $p(F \backslash B_{\delta_1}(x_0))$ sowohl die Wege $p \circ a_1, \ldots, p \circ a_n$ als auch die Bänder $p(B_1), \ldots, p(B_n)$ stets transversal schneiden. p ist also insbesondere eine reguläre Projektion bzgl. der Verschlingung $\partial \dot{F}$.

Jetzt wollen wir die Drehungen der Bänder B_i durch Schleifen ersetzen.



[22]Zwei Wege $c_1, c_2 \colon [0,1] \to X$ sind geschlossen homotop, falls eine Homotopie $H \colon [0,1]^2 \to X$ mit $H(0,t) = c_0(t)$, $H(1,t) = c_1(t)$ für $t \in [0,1]$ und $H(s,0) = H(s,1)$ für $s \in [0,1]$ existiert, d.h. c_1 und c_2 sind als Abbildungen von S^1 nach X homotop.

Das Band B_i sei an k_i Stellen um jeweils 180° verdreht. Da $\dot{F}$ orientierbar ist, muss k_i gerade sein. Man kann zwei Drehungen um 180° in die selbe Richtung (d. h. eine ganze Drehung von B_i) ambient isotop in eine Schleife umformen, wie in der Abbildung angedeutet. Man kann diese Deformationen so gestalten, dass auch sämtliche Schnitte der umgeformten Wege $a_1, \ldots, a_n$ und Bänder $B_1, \ldots, B_n$ transversal sind. So erhalten wir eine Fläche $\ddot{F}$, deren Rand $\partial\ddot{F}$ ambient isotop zu $\mathfrak{L}$ ist. $\ddot{F}$ ist eine Seifertfläche für $\partial\ddot{F}$. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mathfrak{L} = \partial\ddot{F}$ und $F = \ddot{F}$. Eine Seifertfläche mit den Eigenschaften von $\ddot{F}$ bezeichnet man auch als **Bandprojektion**.

Wir wenden uns nun der Berechnung von $H_1(\mathfrak{L}^c)$ zu.

Lemma 5.9 *$[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F$ ist eine Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls $H_1(F)$.*

Beweis: 1. Schritt: $X := \bigcup_{i=1}^n \mathrm{im}(a_i)$ ist ein Deformationsretrakt von F

Begründung: Für $i \in \{1, \ldots, \kappa-1\}$ sind die Wege c_i und a_{2g+i} geschlossen homotop in F . Außerdem gibt es eine Permutation σ der Zahlen 1 bis $\kappa - 1$, so dass c_κ und $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{2g-1} a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1} a_{2g+\sigma(1)}^{-1} \cdots a_{2g+\sigma(\kappa-1)}^{-1}$ in F geschlossen homotop sind. Die zugehörigen Homotopien können alle injektiv gewählt werden. Diese Homotopien induzieren eine Deformationsretraktion von F auf X.

2. Schritt: $H_1(F) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \cdot [a_i]_F$

Begründung: Mit dem Satz von Seifert und van Kampen sieht man, dass $\pi_1(X, x_0)$ die freie Gruppe über der Menge der Homotopieklassen von $a_1, \ldots, a_n$ ist. Es folgt, dass $[a_1]_X, \ldots, [a_n]_X$ eine Basis von $H_1(X)$ ist. Wegen Schritt 1 ist $[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F$ eine Basis von $H_1(F)$. □

$$W := \imath\left(F \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\right)$$

F ist ein Deformationsretrakt von W. Daher gilt $H_1(F) \cong H_1(W)$ und $[a_1]_W, \ldots, [a_n]_W$ ist eine Basis von $H_1(W)$.

Wir führen jetzt weitere geschlossene Wege $m_1, \ldots, m_n$ ein und benutzen diese unter anderem dazu, $H_1(\partial W)$ zu berechnen. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Setze $V_i := \imath(B_i \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ und $V_0 := \imath(\overline{B_{\delta_1}(x_0)} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$. Nun ist $\partial V_i \backslash \partial V_0$ homöomorph zu $S^1 \times]0, 1[$ und es folgt $H_1(\partial V_i \backslash \partial V_0) \cong H_1(S^1 \times]0, 1[) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Wir wählen einen einfach geschlossenen Weg m_i in $\partial V_i \backslash \partial V_0$, der einen Erzeuger von $H_1(\partial V_i \backslash \partial V_0)$ repräsentiert. Es gilt $lk(m_i, a_i) \in \{\pm 1\}$. Wir wählen m_i so, dass $lk(m_i, a_i) = 1$.

Lemma 5.10 *Sei $\varepsilon \in \{+, -\}$. $[a_1^\varepsilon]_{\partial W}, \ldots, [a_n^\varepsilon]_{\partial W}, [m_1]_{\partial W}, \ldots, [m_n]_{\partial W}$ ist eine Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls $H_1(\partial W)$.*

Beweis: Die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz der Zerlegung

$$\partial W = \underbrace{\overline{\left(\partial V_0 \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \partial V_i\right)}}_{M_1} \quad \cup \quad \underbrace{\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left((\partial V_i \backslash \partial V_0) \cup \operatorname{im}(a_i^\varepsilon)\right)\right)}}_{M_2}$$

ist exakt. $M_1 \cap M_2$ ist zusammenhängend, d. h. die 0-te reduzierte Homologiegruppe $\widetilde{H}_0(M_1 \cap M_2)$ ist trivial. Also ist die Sequenz

$$H_1(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{\psi} H_1(M_1) \oplus H_1(M_2) \xrightarrow{\varphi} H_1(\partial W) \longrightarrow 0$$

exakt. $H_1(M_2)$ besitzt die Basis $[a_1^\varepsilon]_{M_2}, \dots, [a_n^\varepsilon]_{M_2}, [m_1]_{M_2}, \dots, [m_n]_{M_2}$. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. $\partial V_0 \cap \partial V_i \subset M_1 \cap M_2$ ist homöomorph zu $S^1 \amalg S^1$. Auf jeder der Komponenten von $\partial V_0 \cap \partial V_i$ wählen wir einen in ∂V_i zu m_i homologen geschlossenen Weg. Wir bezeichnen diese Wege mit $\hat{m}_i$ und $\check{m}_i$. Es ist $[\hat{m}_1]_{M_1 \cap M_2}, \dots, [\hat{m}_n]_{M_1 \cap M_2}, [\check{m}_1]_{M_1 \cap M_2}, \dots, [\check{m}_n]_{M_1 \cap M_2}$ eine Basis von $H_1(M_1 \cap M_2)$ und $[\hat{m}_1]_{M_1}, \dots, [\hat{m}_n]_{M_1}, [\check{m}_1]_{M_1}, \dots, [\check{m}_{n-1}]_{M_1}$ ist eine Basis von $H_1(M_1)$. M_1 ist homöomorph zu einer 2-Sphäre, aus der $2n$ Kreisscheiben entfernt wurden. Wir wählen für $H_1(M_1) \oplus H_1(M_2)$ die Basis $[\hat{m}_1]_{M_1} \oplus [m_1]_{M_2}, \dots, [\hat{m}_n]_{M_1} \oplus [m_n]_{M_2}, [\check{m}_1]_{M_1} \oplus [m_1]_{M_2}, \dots, [\check{m}_{n-1}]_{M_1} \oplus [m_{n-1}]_{M_2}, -[m_1]_{M_2}, \dots, -[m_n]_{M_2}, -[a_1^\varepsilon]_{M_2}, \dots, -[a_n^\varepsilon]_{M_2}$. Die ersten $2n-1$ Basiselemente sind eine Basis von $\operatorname{im}(\psi) = \ker(\varphi)$. Die Bilder der letzten $2n$ Basiselemente von $H_1(M_1) \oplus H_1(M_2)$ unter φ sind $[m_1]_{\partial W}, \dots, [m_n]_{\partial W}$, $[a_1^\varepsilon]_{\partial W}, \dots, [a_n^\varepsilon]_{\partial W}$. Also gilt

$$H_1(\partial W) = \operatorname{im}(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} \cdot [m_i]_{\partial W} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} \cdot [a_i^\varepsilon]_{\partial W}.$$

□

Lemma 5.11 $[m_1]_{\overline{S^3 \backslash W}}, \dots, [m_n]_{\overline{S^3 \backslash W}}$ *ist eine Basis von* $H_1(\overline{S^3 \backslash W})$.

Beweis: Die Mayer-Vietoris-Sequenz der Zerlegung $S^3 = W \cup \overline{S^3 \backslash W}$ ist exakt. Es gilt $\partial W = W \cap \overline{S^3 \backslash W}$ und $H_1(S^3) = H_2(S^3) = 0$.

$$0 \longrightarrow H_1(\partial W) \xrightarrow{\varphi} H_1(W) \oplus H_1(\overline{S^3 \backslash W}) \longrightarrow 0$$

Es folgt $H_1(\overline{S^3 \backslash W}) \cong \mathbb{Z}^n$. Wähle $[a_1^+]_{\partial W}, \dots, [a_n^+]_{\partial W}, [m_1]_{\partial W}, \dots, [m_n]_{\partial W}$ als Basis von $H_1(\partial W)$. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\varphi([a_i^+]_{\partial W}) = [a_i]_W \oplus [a_i^+]_{\overline{S^3 \backslash W}}$ und $\varphi([m_i]_{\partial W}) = [m_i]_{\overline{S^3 \backslash W}}$. Also ist $[m_1]_{\overline{S^3 \backslash W}}, \dots, [m_n]_{\overline{S^3 \backslash W}}$ eine Basis von $H_1(\overline{S^3 \backslash W})$. □

Lemma 5.12 *Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\varepsilon \in \{+, -\}$. Es gilt*

$$[a_i^\varepsilon]_{\overline{S^3 \setminus W}} = \sum_{k=1}^{n} lk(a_i^\varepsilon, a_k)[m_k]_{\overline{S^3 \setminus W}}.$$

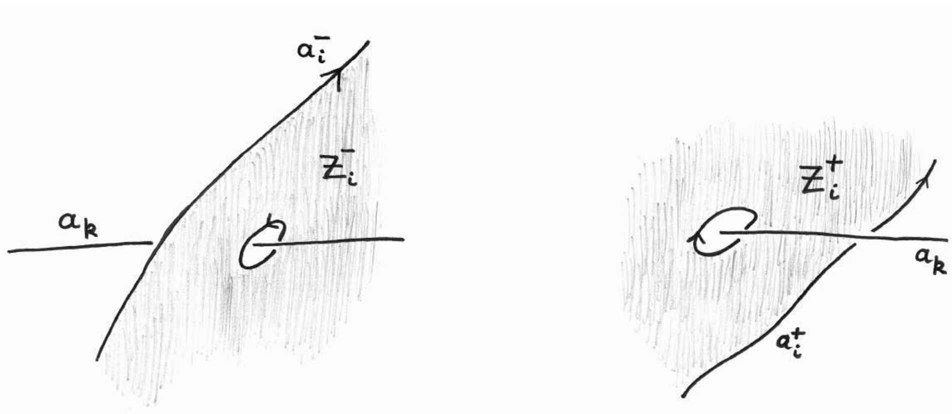
BEWEIS: Sei $\varepsilon = -$. Wir definieren eine Summe von 2-Simplizes $Z_i^- \subset \mathbb{R}^3$.

$$Z_A^- := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists_{y \in \mathrm{im}(a_i^-)} p(y) = p(x) \text{ und } x \text{ liegt unter } y \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Sei E^- eine zu E parallele Ebene unter $\mathfrak{L}$. $Z_A^- \cap E^-$ zerlegt sowohl Z_A^- als auch E^- in eine beschränkte und eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente. Wir bezeichnen die Vereinigung der beschränkten Komponenten mit Z_B und setzen

$$Z_i^- := Z_B \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^{n} V_i} \ ,$$

wobei $V_i := \imath(B_i \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$. Z_i^- kann als eine endliche Summe von 2-Simplizes aufgefasst werden. Außerdem ist Z_i^- zusammenhängend. Wir wählen die Orientierung von Z_i^- so, dass auf der Randkomponente $\mathrm{im}(a_i^-)$ die Orientierung von a_i^- induziert wird. Der Rand von Z_i^- besteht nun aus dem 1-Simplex a_i^- und einem 1-Simplex für jede Unterkreuzung eines der Wege $a_1, \ldots, a_n$ unter a_i^-.



Der 1-Simplex γ an einer Unterkreuzung des Weges a_k unter a_i^- ist in $\overline{S^3 \setminus W}$ homotop zu m_k^{-1}, falls a_k den Weg a_i^- von rechts nach links kreuzt. Falls a_k den Weg a_i^- von links nach rechts unterkreuzt, so ist γ in $\overline{S^3 \setminus W}$ homotop zu m_k. Es folgt nun

$$0 = [\partial Z_i^-]_{\overline{S^3 \setminus W}} = [a_i^-]_{\overline{S^3 \setminus W}} - \sum_{k=1}^{n} lk(a_i^-, a_k)[m_k]_{\overline{S^3 \setminus W}}$$

Der Beweis für den Fall $\varepsilon = +$ verläuft analog mit einer Summe von 2-Simplizes Z_i^+ über a_i^+. $\square$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Der Weg m_i schneidet die Verschlingung $\mathfrak{L}$. Zur Berechnung von $H_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c})$ wählen wir einen Weg s_i in $S^3 \backslash W$, der in $\overline{S^3 \backslash W}$ zu m_i geschlossen homotop ist. Natürlich ist $[s_1]_{\overline{S^3 \backslash W}}, \dots, [s_n]_{\overline{S^3 \backslash W}}$ dann eine Basis von $H_1(S^3 \backslash W)$.

Lemma 5.13 $[s_1]_{F^c}, \dots, [s_n]_{F^c}$ *ist eine Basis von* $H_1(F^c)$.

Beweis: Wir beweisen zunächst folgende Hilfsbehauptung:

Sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Sei $i \in \mathbb{N}$. Zu jedem i-Zykel σ in X gebe es einen i-Zykel in Y, der in X zu σ homolog ist. Für je zwei i-Zykel σ und τ in Y gelte: Sind σ und τ in X homolog, so auch in Y. Unter diesen Voraussetzungen ist $\varphi \colon H_i(Y) \to H_i(X), [\sigma]_Y \mapsto [\sigma]_X$ ein Isomorphismus.

Begründung: φ ist wohldefiniert und laut Voraussetzung surjektiv. Gilt $[\sigma]_X = [\tau]_X$, so sind laut Voraussetzung σ und τ auch in Y homolog, d. h. $[\sigma]_Y = [\tau]_Y$. Also ist φ injektiv und die Hilfsbehauptung bewiesen.

Wir wählen $i = 1$ und wenden die Hilfsbehauptung zweimal an, zuerst auf $X := S^3 \backslash \mathring{F}$ und $Y := \overline{S^3 \backslash W}$, dann auf $X := S^3 \backslash \mathring{F}$ und $Y := F^c$. $\square$

Satz 5.14 $A := S^T - tS \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]$ *ist eine Präsentationsmatrix des* $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]$*-Moduls* $H_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c})$ *falls* $n > 0$. *Im Fall* $n = 0$ *gilt* $H_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c}) = 0$.

Beweis: $t \in \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}] = \mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}^c}}$ ist die in Lemma 5.3 definierte Deckbewegung. Wir verwenden noch einmal die Bezeichnungen aus Abschnitt 5.2 und fassen für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Wege a_i^+, a_i^- und s_i als Wege in $F_0^c \subset \widetilde{\mathfrak{L}^c}$ auf. Dann gilt

$$t \cdot a_j^+ = a_j^- . \tag{34}$$

Mit $\cup$ und $\cap$ sind in diesem Beweis stets Vereinigung bzw. Durchschnitt von Teilmengen von $\widetilde{\mathfrak{L}^c}$ gemeint (und nicht von $S^3 \times \mathbb{Z}$). Die Mayer-Vietoris-Sequenz der Zerlegung $\widetilde{\mathfrak{L}^c} = \widetilde{F^c} \cup \widetilde{U}$ ist exakt. Es gilt $U_k^- = F_k^c \cap U_k$ und $U_k^+ = F_{k+1}^c \cap U_k$ und deshalb auch $\widetilde{F^c} \cap \widetilde{U} = \widetilde{U^+} \cup \widetilde{U^-}$. Die Abbildung $H_0(\widetilde{U^+} \cup \widetilde{U^-}) \to H_0(\widetilde{F^c}) \oplus H_0(\widetilde{U})$ aus der Mayer-Vietoris-Sequenz ist injektiv. Daher ist folgende Sequenz exakt:

$$H_1(\widetilde{U^+} \cup \widetilde{U^-}) \xrightarrow{\varphi} H_1(\widetilde{F^c}) \oplus H_1(\widetilde{U}) \xrightarrow{\psi} H_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c}) \longrightarrow 0$$

φ und ψ sind Abbildungen der Mayer-Vietoris-Sequenz. Die $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]$-Moduln $H_1(\widetilde{U^+} \cup \widetilde{U^-})$, $H_1(\widetilde{F^c})$ und $H_1(\widetilde{U})$ sind frei und wir können eine Basis angeben: Wenn klar ist, um welchen topologischen Raum es sich handelt, lassen wir im Folgenden den Index an den Homologieklassen weg. $[a_1^+], \dots, [a_n^+]$, $[a_1^-], \dots, [a_n^-]$ ist eine $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]$-Modulbasis von $H_1(\widetilde{U^+} \cup \widetilde{U^-})$. Also ist auch

$$[a_1^+], \dots, [a_n^+], [a_1^-] - t \cdot [a_1^+], \dots, [a_n^-] - t \cdot [a_n^+]$$

eine Basis von $H_1(\widetilde{U^+} \cup \widetilde{U^-})$. Außerdem ist $[s_1], \ldots, [s_n]$ eine Basis von $H_1(\widetilde{F^c})$ und $[a_1^+], \ldots, [a_n^+]$ ist eine Basis von $H_1(\widetilde{U})$. Es folgt, dass

$$[s_1]_{\widetilde{F^c}}, \ldots, [s_n]_{\widetilde{F^c}}, \sum_{k=1}^{n} lk(a_1^+, a_k)[s_k]_{\widetilde{F^c}} \oplus [a_1^+]_{\widetilde{U}}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} lk(a_n^+, a_k)[s_k]_{\widetilde{F^c}} \oplus [a_n^+]_{\widetilde{U}}$$

eine Basis von $H_1(\widetilde{F^c}) \oplus H_1(\widetilde{U})$ ist.

Wir wissen, wie die Basiselemente unter ψ bzw. φ abgebildet werden: Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\begin{aligned}
\varphi([a_i^+]) &= \sum_{k=1}^{n} lk(a_i^+, a_k)[s_k]_{\widetilde{F^c}} \oplus [a_i^+]_{\widetilde{U}} \\
\varphi([a_i^-]) &= \sum_{k=1}^{n} lk(a_i^-, a_k)[s_k]_{\widetilde{F^c}} \oplus [a_i^+]_{\widetilde{U}} \\
\varphi([a_i^-] - t \cdot [a_i^+]) &= \sum_{k=1}^{n} \big(lk(a_i^-, a_k) - t \cdot lk(a_i^+, a_k)\big)[s_k]_{\widetilde{F^c}} \\
\psi([a_i^+]_{\widetilde{U}}) = -[a_i^+]_{\widetilde{\mathfrak{L}^c}} &= -\sum_{k=1}^{n} lk(a_i^+, a_k)[s_k]_{\widetilde{\mathfrak{L}^c}} \\
\psi([s_i]_{\widetilde{F^c}}) &= [s_i]_{\widetilde{\mathfrak{L}^c}} \\
\psi\left(\sum_{k=1}^{n} lk(a_i^+, a_k)[s_k]_{\widetilde{F^c}} \oplus [a_i^+]_{\widetilde{U}}\right) &= 0
\end{aligned}$$

$M \subset H_1(\widetilde{U^+} \cup \widetilde{U^-})$ sei der freie $\mathbb{Z}[\mathfrak{z}]$-Modul zur Basis $[a_1^-] - t \cdot [a_1^+], \ldots,$ $[a_n^-] - t \cdot [a_n^+]$. Wir erhalten folgende exakte Sequenz:

$$M \xrightarrow{\varphi|_M} H_1(\widetilde{F^c}) \xrightarrow{\psi|_{H_1(\widetilde{F^c})}} H_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c}) \longrightarrow 0$$

Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $lk(a_i^+, a_j) = lk(a_j, a_i^+) \overset{\clubsuit}{=} lk(a_j^-, a_i)$. Man sieht ($\clubsuit$), wenn man in der Bandprojektion $lk_4(a_j, a_i^+)$ und $lk_4(a_j^-, a_i)$ berechnet. Nun erhalten wir folgende Präsentation des $\mathbb{Z}[\mathfrak{z}]$-Moduls $H_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z}[\mathfrak{z}]^n & \xrightarrow{A^T} & \mathbb{Z}[\mathfrak{z}]^n & \longrightarrow & H_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & e_i & \longmapsto & [s_i] & &
\end{array}$$

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnet dabei die Standardbasis von $\mathbb{Z}[\mathfrak{z}]^n$. $\square$

Nun beweisen wir den Satz, dass sich die reduzierten Alexanderpolynome mit einer Seifertmatrix berechnen lassen.

Satz 5.15 *Sei S eine Seifertmatrix für $\mathfrak{L}$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$*

$$\Delta_k(S^T - tS) = \widetilde{\Delta}_k(\mathfrak{L}).$$

Beweis: Sei X der in Abschnitt 4.1 zu einer reduzierten Wirtingerpräsentation von $\mathfrak{L}$ konstruierte CW-Komplex mit 0-Zelle P. $\widehat{p}\colon \widehat{X} \to X$ sei die maximale abelsche Überlagerung von X und $\widehat{P}$ ein Punkt über P. X induziert auf $\widehat{X}$ die Struktur eines CW-Komplexes. $\widetilde{p}\colon \widetilde{X} \to X$ sei die Überlagerung von X zur Untergruppe $G := \pi_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c} \to \mathfrak{L}^c)(\pi_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c}, \widetilde{x}_0)) \subset \pi_1(\mathfrak{L}^c, x_0) = \pi_1(X, P)$. Dabei ist $x_0 \in \mathfrak{L}^c$ und $\widetilde{x}_0 := (x_0, 0) \in \widetilde{\mathfrak{L}^c}$. $\widetilde{X}$ ist ebenfalls ein CW-Komplex. Da $\pi_1(\mathfrak{L}^c, x_0)/G \cong \mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}^c}}$ abelsch ist, muss G die Gruppe $\pi_1(\mathfrak{L}^c, x_0)'$ enthalten. Es gibt also eine eindeutig bestimmte Überlagerung $p\colon \widehat{X} \to \widetilde{X}$ mit $\widetilde{p} \circ p = \widehat{p}$. p induziert einen surjektiven Homomorphismus $p_i\colon C_i(\widehat{X}) \to C_i(\widetilde{X})$ für $i \in \{0, 1, 2\}$. Das gleiche gilt für die anderen Überlagerungen. Gleichung (24) besagt, dass die Zeilen des folgenden Diagramms exakt sind.

$$\begin{tikzcd}
C_2(\widehat{X}) \arrow[r, "\partial^\wedge"] \arrow[d, "p_2"] & C_1(\widehat{X}) \arrow[r] \arrow[d, "p_1"] & H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)}) \arrow[r] & 0 \\
C_2(\widetilde{X}) \arrow[r, "\partial^\sim"] & C_1(\widetilde{X}) \arrow[r] & H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ist $b_1, \ldots, b_r$ eine aus 2-Zellen von X bestehende Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls $C_2(X)$, so wählen wir für $i \in \{1, \ldots, r\}$ Urbilder $\widetilde{b}_i$ von b_i unter $\widetilde{p}_2$ und Urbilder $\widehat{b}_i$ von $\widetilde{b}_i$ unter p_2. $\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_r$ ist dann eine Basis des $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widetilde{\mathfrak{L}^c}}]$-Moduls $C_2(\widetilde{X})$ und $\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_r$ ist eine Basis des $\mathbb{Z}[\mathcal{D}_{\widehat{\mathfrak{L}^c}}]$-Moduls $C_2(\widehat{X})$. Ebenso wählen wir Urbilder einer aus 1-Zellen bestehenden Basis $c_1, \ldots, c_n$ von $C_1(X)$ und erhalten Basen von $C_1(\widetilde{X})$ und $C_1(\widehat{X})$. Ist $\widehat{A}$ eine darstellende Matrix von $\partial^\wedge$, so ist $\widetilde{A} := \chi(\widehat{A})$ eine darstellende Matrix von $\partial^\sim$. Dabei definieren wir die Wirkung von χ auf Matrizen komponentenweise.

Sei S eine Seifertmatrix für $\mathfrak{L}$ und $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\Delta_k(S^T - tS) &= \Delta_k(H_1(\widetilde{\mathfrak{L}^c})) \overset{Satz\ 4.17}{=} \Delta_{k+1}(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{X}^{(0)})) \\
&= \Delta_{k+1}(\widetilde{A}) = \chi(\Delta_{k+1}(\widehat{A})) \\
&= \chi(\Delta_{k+1}(H_1(\widehat{X}, \widehat{X}^{(0)}))) \overset{Satz\ 4.17}{=} \chi(\Delta_k(H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c}))) \\
&= \chi(\Delta_k(\mathfrak{L})) = \widetilde{\Delta}_k(\mathfrak{L})
\end{aligned}$$

□

5.6 Symmetrie des reduzierten Alexanderpolynoms

Satz 5.16 *$\widetilde{\Delta}_k(\mathfrak{L})$ besitzt folgende Symmetrie:*

(35) $$\widetilde{\Delta}_k(\mathfrak{L})(t) = \widetilde{\Delta}(\mathfrak{L})(t^{-1})$$

BEWEIS: S sei eine Seifertmatrix zur Verschlingung $\mathfrak{L}$.

$$A(t) := S^T - tS$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}_k(\mathfrak{L})(t) = \Delta_k(A(t)) = \Delta_k(A(t)^T) &\overset{\clubsuit}{=} \Delta_k(A(t^{-1})) \\ &\overset{\spadesuit}{=} \Delta_k(A(t))(t^{-1}) = \widetilde{\Delta}_k(\mathfrak{L})(t^{-1})\end{aligned}$$

($\clubsuit$) gilt wegen $A(t^{-1}) = S^T - t^{-1}S = -t^{-1} \cdot (S - tS^T) = -t^{-1} \cdot A(t)^T$.
Die Gleichheit ($\spadesuit$) gilt, da die beiden folgenden Abbildungen kommutieren:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}] \to \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}] \qquad & t \mapsto t^{-1} \\ \Delta_k\colon \text{ Matrizen über } \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}] \to & \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}]/\pm\mathfrak{Z} \end{aligned}$$

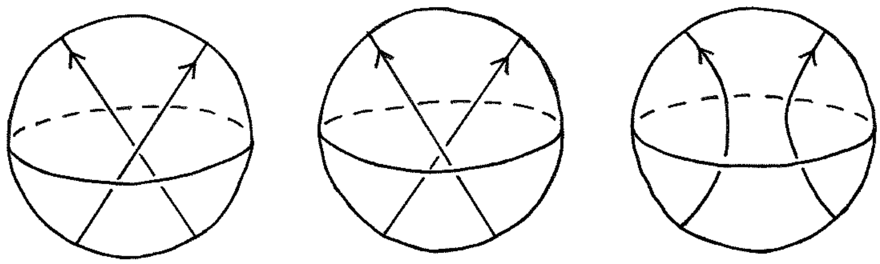
$\square$

6 Das reduzierte Alexanderpolynom als Entwirrungsinvariante

6.1 Entwirrungsinvarianten

Seien $\mathfrak{L}_+$, $\mathfrak{L}_-$ und $\mathfrak{L}_0$ Verschlingungen.

Definition 6.1 *$(\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-, \mathfrak{L}_0)$ heißt* ***Entwirrungstripel****, falls es einen zu D^3 homöomorphen Teilraum $U \subset S^3$ gibt, so dass $\mathfrak{L}_+$, $\mathfrak{L}_-$ und $\mathfrak{L}_0$ in $S^3 \backslash \mathring{U}$ orientiert gleich sind und in U folgendermaßen aussehen:*



$\mathfrak{L}_+$ $\mathfrak{L}_-$ $\mathfrak{L}_0$

Dass $\mathfrak{L}_+$, $\mathfrak{L}_-$ und $\mathfrak{L}_0$ in $S^3 \backslash \mathring{U}$ orientiert gleich sind, soll heißen, dass $\mathfrak{L}_+ \backslash \mathring{U} = \mathfrak{L}_- \backslash \mathring{U} = \mathfrak{L}_0 \backslash \mathring{U}$ und dass die von $\mathfrak{L}_+$, $\mathfrak{L}_-$ und $\mathfrak{L}_0$ auf $\mathfrak{L}_+ \backslash \mathring{U}$, $\mathfrak{L}_- \backslash \mathring{U}$ und $\mathfrak{L}_0 \backslash \mathring{U}$ induzierten Orientierungen gleich sind.

Mit $\mathcal{V}$ bezeichnen wir die Menge aller Verschlingungen modulo der im Folgenden beschriebenen Äquivalenzrelation „ungeordnet ambient isotop".

Seien ℓ_1 und ℓ_2 Verschlingungen. ℓ_1 ist **ungeordnet ambient isotop** zu ℓ_2, wenn es eine Umordnung von ℓ_1 gibt, die ambient isotop zu ℓ_2 ist. Vergleiche Bemerkung 2.37 (2).

Definition 6.2 *Eine* ***Entwirrungsinvariante*** *ist eine Abbildung*

$$\gamma \colon \mathcal{V} \to R$$

in einen kommutativen Ring mit Eins, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. *Es gibt Einheiten $a_+, a_-, a_0 \in R^*$, so dass für jedes Entwirrungstripel $(\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-, \mathfrak{L}_0)$ gilt*

   (36) $$a_+ \cdot \gamma(\mathfrak{L}_+) + a_- \cdot \gamma(\mathfrak{L}_-) + a_0 \cdot \gamma(\mathfrak{L}_0) = 0.$$

2. *Das Bild des trivialen Knotens unter γ ist 1.*

Die Elemente $a_+, a_-, a_0 \in R^*$ heißen Entwirrungskoeffizienten. Die Gleichung (36) wird auch ***Entwirrungsrelation*** *genannt.*

6.2 Die Entwirrungsrelation des reduzierten Alexanderpolynoms

Wollen wir es als Entwirrungsinvariante auffassen, so muss das reduzierte Alexanderpolynom einer Verschlingung Element eines Rings sein. $\mathbb{Z}[\mathfrak{z}]/\pm\mathfrak{z}$ ist jedoch nur ein Monoid.

Sei $\mathfrak{L}$ eine Verschlingung und S eine Seifertmatrix von $\mathfrak{L}$. Wir setzen

$$\natural\widetilde{\Delta}_0(\mathfrak{L}) := \det(S^T - tS).$$

Die Äquivalenzklasse von $\natural\widetilde{\Delta}_0(\mathfrak{L})$ in $\mathbb{Z}[\mathfrak{z}]/\pm\mathfrak{z}$ ist dann nach Satz 5.15 das reduzierte Alexanderpolynom $\widetilde{\Delta}_0(\mathfrak{L})$.

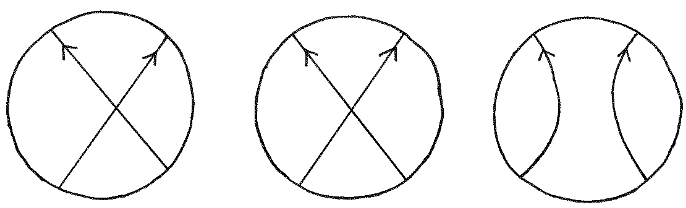
Es gilt sogar, dass $\natural\widetilde{\Delta}_0(\mathfrak{L})$ unabhängig von der Wahl von S ist. Vergleiche z. B. [15]. Dies wird im folgenden Satz nicht benutzt.

Satz 6.3 *Für jedes Entwirrungstripel* $(\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-, \mathfrak{L}_0)$ *gilt*

$$\natural\widetilde{\Delta}_0(\mathfrak{L}_+) - \natural\widetilde{\Delta}_0(\mathfrak{L}_-) + (1-t)\cdot\natural\widetilde{\Delta}_0(\mathfrak{L}_0) = 0. \tag{37}$$

Welche Seifertmatrizen hierbei verwendet werden, ist dem Beweis zu entnehmen.

Beweis: Sei $U \subset S^3$ ein zu D^3 homöomorpher Teilraum wie in Definition 6.1. Wir wählen eine Projektion $p\colon \mathbb{R}^3 \to E$, die für alle drei Verschlingungen regulär ist. Wir wollen U so klein wählen, dass $p(\mathfrak{L}_+)$, $p(\mathfrak{L}_-)$ und $p(\mathfrak{L}_0)$ in $p(U)$ folgendermaßen aussehen:



$p(\mathfrak{L}_+)$ $\quad$ $p(\mathfrak{L}_-)$ $\quad$ $p(\mathfrak{L}_0)$

Damit wir U klein genug wählen können, müssen wir $\mathfrak{L}_0$ eventuell durch eine ambient isotope Verschlingung ersetzen, die sich nur im ursprünglichen U von $\mathfrak{L}_0$ unterscheidet.

Wir konstruieren entsprechend Satz 5.2 eine Seifertfläche F_0. F_0 induziert Seifertflächen F_+ und F_- für $\mathfrak{L}_+$ bzw. $\mathfrak{L}_-$. Da Seifertflächen orientiert sind und auf dem Rand die Orientierung der Verschlingung induzieren, können wir erreichen, dass die Seifertflächen in U aussehen, wie in Abbildung 5 dargestellt.

Betrachtet man die Mayer-Vietoris-Sequenz der Zerlegung

$$F_\pm = (F_\pm \backslash \mathring{U}) \cup (F_\pm \cap U)$$

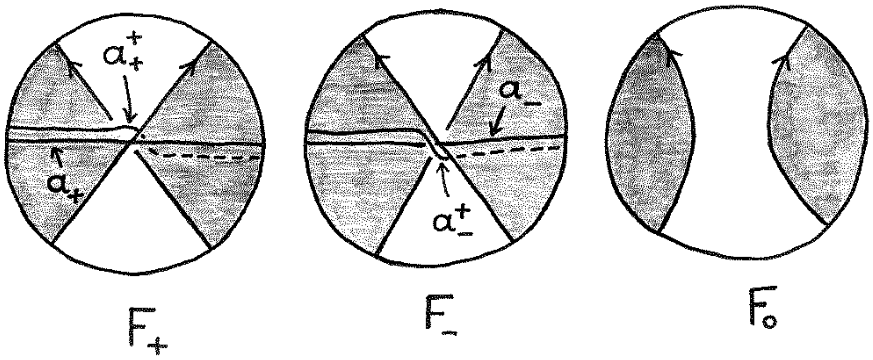


Abbildung 5: Seifertflächen eines Entwirrungstripels

so sieht man, dass es geschlossene Wege $a_\pm$ in $F_\pm$ gibt mit

$$H_1(F_\pm) \cong H_1(F_0) \oplus \mathbb{Z} \cdot [a_\pm]_{F_\pm}.$$

Es seien orientierungserhaltende bi-Kragen für F_+ und F_- gegeben. In Abschnitt 5.4 haben wir zu $a_\pm$ die Wege $a_\pm^+$ erklärt (vgl. Abbildung 5). Bezüglich einer gegenüber p leicht veränderten regulären Projektion[23] erhalten wir nun $1 + lk_4(a_+^+, a_+) = lk_4(a_-^+, a_-)$. Sei g_0 das Geschlecht von F_0, κ_0 die Anzahl der Komponenten von $\mathfrak{L}_0$ und $n := 2g_0 + \kappa_0 - 1$. Sei $a_1, \ldots, a_n$ ein System von geschlossenen Wegen in $F_0 \backslash U$, deren Homologieklassen eine Basis von $H_1(F_0)$ bilden. Die Seifertmatrizen bzgl. der Systeme von geschlossenen Wegen $a_1, \ldots, a_n$ in F_0, $a_1, \ldots, a_n, a_+$ in F_+ und $a_1, \ldots, a_n, a_-$ in F_- bezeichnen wir mit S_0, S_+ und S_-. Es gilt nun

$$S_+ = S_- + \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_- = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & S_0 & \\ * & & & \end{pmatrix},$$

wobei die Sterne für irgendwelche Einträge an den entsprechenden Stellen stehen. Es folgt

$$S_+^T - tS_+ = S_-^T - tS_- + \begin{pmatrix} t-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

[23] In Abbildung 5 sind Ausschnitte der so projizierten Seifertflächen F_+, F_- und F_0 dargestellt.

und wegen der Linearität der Determinanten in der ersten Spalte gilt

$$\begin{aligned}\det(S_+^T - tS_+) &= \det(S_-^T - tS_-) + \det\begin{pmatrix} t-1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & S_0^T - tS_0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \det(S_-^T - tS_-) + (t-1)\cdot\det(S_0^T - tS_0).\end{aligned}$$

Nun folgt die Behauptung des Satzes. $\square$

$\natural\widetilde{\Delta}_0(\mathfrak{L})$ ist - weil unabhängig von der in der Definition verwendeten Seifertmatrix - eine Invariante ungeordneter Verschlingungen, also ist

$$\natural\widetilde{\Delta}_0\colon \mathcal{V} \to Q(\mathfrak{z})$$

eine Entwirrungsinvariante, wobei $Q(\mathfrak{z})$ den Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[\mathfrak{z}]$ bezeichnet.

Die Entwirrungsrelation ist oft eine gute Möglichkeit das reduzierte Alexanderpolynom einer Verschlingung auszurechnen. Vergleiche z. B. [19].

7 Zusammenhang von Alexanderpolynom und Torsion

R sei ein noetherscher Integritätsring.

7.1 Definition der Torsion

M sei ein freier, endlich erzeugter Modul über R mit $\operatorname{rk} M = m$. Seien $b = (b_1, \ldots, b_m)$ und $c = (c_1, \ldots, c_m)$ zwei (geordnete) Basen von M.[24] Dann gibt es eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \in Mat_R(m,m)$ mit $b_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} c_i$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$. Die Matrix A beschreibt einen Basiswechsel. In der j-ten Spalte stehen die Koordinaten von b_j in der Basis c. A ist invertierbar, da man umgekehrt die Elemente c_i $(i = 1, \ldots, m)$ auch in der Basis b darstellen kann. Also gilt $\det(A) \in R^*$.

Definition 7.1 *Wir setzen* $[b/c] := \det(A) \in R^*$. *Für eine* 0×0*-Matrix* A *definieren wir* $\det(A) := 1$.

Wir nennen die Basen b *und* c *äquivalent* ($b \sim c$)*, falls* $[b/c] = 1$.

Bemerkung 7.2 *Es gilt* $[b/b] = 1$ *und* $[b/c]^{-1} = [c/b]$. *Ist* $d = (d_1, \ldots, d_m)$ *eine weitere Basis von* M*, so gilt* $[b/d] = [b/c][c/d]$.

$\sim$ *ist also eine Äquivalenzrelation.*

Sei

$$0 \longrightarrow C \overset{\imath}{\hookrightarrow} D \overset{\beta}{\longrightarrow} E \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von freien, endlich erzeugten Moduln über R. Es sei $C \subset D$ und $\imath$ die zugehörige Inklusion. Es gilt $\operatorname{rk}(D) = \operatorname{rk}(C) + \operatorname{rk}(E)$. Sei $c = (c_1, \ldots, c_k)$ eine Basis von C und $e = (e_1, \ldots, e_l)$ eine Basis von E. β ist surjektiv, zu $e_1, \ldots, e_l$ existieren also Urbilder $e'_1, \ldots, e'_l$. Nun ist

$$ce := (c_1, \ldots, c_k, e'_1, \ldots, e'_l) \tag{38}$$

eine Basis von D. Die Äquivalenzklasse von ce hängt nicht von der Wahl der Urbilder $e'_1, \ldots, e'_l$ von $e_1, \ldots, e_l$ ab, denn die den zugehörigen Basiswechsel beschreibende Matrix ist von der Form

$$\begin{pmatrix} I_k & * \\ 0 & I_l \end{pmatrix}.$$

Ist c' eine zu c äquivalente Basis von C, so gilt $ce \sim c'e$. Ebenso gilt $ce \sim ce'$, falls e' eine zu e äquivalente Basis von E ist. Die Äquivalenzklasse von ce hängt also nur von den Äquivalenzklassen von c und e ab.

[24] Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M ein endlich erzeugter, freier R-Modul. Dann sind je zwei Basen von M gleich lang (vgl. [4]).

Sei nun

$$C = (\ 0 \longrightarrow C_m \xrightarrow{\partial_{m-1}} C_{m-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0 \longrightarrow 0\ )$$

ein exakter Kettenkomplex von freien, endlich erzeugten R-Moduln. Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ sei eine Basis c_i von C_i gegeben. Wir setzen $B_i := \mathrm{im}(\partial_i) \subset C_i$ und $B_{-1} = B_m = 0$. B_i ist endlich erzeugt als Untermodul eines endlich erzeugten Moduls über einem noetherschen Ring. Nun ist folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow B_i \hookrightarrow C_i \xrightarrow{\partial_{i-1}} B_{i-1} \longrightarrow 0 \tag{39}$$

Wir werden nun zunächst annehmen, dass die Moduln B_i frei sind. Wir wählen eine Basis b_i von B_i für $i \in \{-1, \ldots, m\}$. Nun ist $b_i b_{i-1}$ eine Basis von C_i (vgl. (38)). Diese Basen werden wir nun mit den gegebenen Basen $c_0, \ldots, c_m$ vergleichen.

Definition 7.3 *In der vorliegenden Situation ist*

$$\tau(C) := \prod_{i=0}^{m} [b_i b_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} \in R^*$$

die Torsion von C.

Lemma 7.4 *Die Torsion $\tau(C)$ hängt nicht von der Wahl der Basen b_i von B_i ab ($i \in \{-1, \ldots, m\}$).*

Beweis: Für $i \in \{-1, m\}$ ist die Behauptung klar.

Sei $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Es ist zu zeigen, dass

$$[b_i b_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} [b_{i+1} b_i/c_{i+1}]^{(-1)^{i+2}}$$

unabhängig von der Wahl der Basis b_i ist.

Sei d_i eine weitere Basis von B_i, dann gelten folgende Gleichungen:

$$[d_i b_{i-1}/c_i] = [d_i b_{i-1}/b_i b_{i-1}][b_i b_{i-1}/c_i] = [d_i/b_i][b_i b_{i-1}/c_i]$$
$$[b_{i+1} d_i/c_{i+1}] = [b_{i+1} d_i/b_{i+1} b_i][b_{i+1} b_i/c_i] = [d_i/b_i][b_{i+1} b_i/c_{i+1}]$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 7.5 *Die Torsion $\tau(C)$ hängt von der Wahl der Basen $c_0, \ldots, c_m$ ab. Bezeichnen wir mit D den Kettenkomplex C mit anderen vorgegebenen Basen $d_0, \ldots, d_m$ von $C_0, \ldots, C_m$, so gilt*

$$\tau(D) = \tau(C) \cdot \prod_{i=0}^{m} [c_i/d_i]^{(-1)^{i+1}}.$$

Jetzt wollen wir die Annahme, dass die Moduln B_i frei sind, fallen lassen.

Definition 7.6 *Ein Modul M heißt **stabilisiert frei**, falls ein freier, endlich erzeugter Modul F existiert, so dass $M \oplus F$ frei ist.*

Lemma 7.7 *Für $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ ist B_i stabilisiert frei.*

Beweis per Induktion: $B_0 = C_0$ ist frei.

Angenommen es gebe einen freien, endlich erzeugten R-Modul F_{i-1}, so dass $B_{i-1} \oplus F_{i-1}$ frei ist. Da B_{i-1} endlich erzeugt ist, ist auch $B_{i-1} \oplus F_{i-1}$ endlich erzeugt. Aus (39) erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow B_i \longrightarrow C_i \oplus F_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1} \oplus id} B_{i-1} \oplus F_{i-1} \longrightarrow 0\,.$$

Da $B_{i-1} \oplus F_{i-1}$ frei ist, existiert ein Modulhomomorphismus

$$s_{i-1} \colon B_{i-1} \oplus F_{i-1} \to C_i \oplus B_{i-1}$$

mit $(\partial_{i-1} \oplus id) \circ s_{i-1} = id$. Die Abbildung s_{i-1} ist automatisch injektiv. Es folgt $C_i \oplus F_{i-1} = B_i \oplus s_{i-1}(B_{i-1} \oplus F_{i-1})$, d. h. B_i ist stabilisiert frei. $\square$

Sei F nun ein freier, endlich erzeugten R-Modul und $i \in \mathbb{N}$. Den Kettenkomplex

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow F \xrightarrow{id} F \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

mit F an den Stellen i und $i+1$ bezeichnen wir mit $C(F, i)$. Für $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ wähle einen freien, endlich erzeugten R-Modul F_i, so dass $B_i \oplus F_i$ frei ist. Für F_i wählen wir außerdem eine Basis. Auf den Kettenkomplex $C \oplus \bigoplus_{i=1}^{m-1} C(F_i, i)$ können wir nun Definition 7.3 anwenden.

Definition 7.8 *Als **Torsion** des exakten Kettenkomplexes C mit den gegebenen Basen $c_0, \ldots, c_m$ bezeichnen wir*

$$\tau(C) := \tau\left(C \oplus \bigoplus_{i=1}^{m-1} C(F_i, i)\right) \in R^*.$$

Ist C ein nicht exakter Kettenkomplex, so setze $\tau(C) := 0$.

Bemerkung 7.9

1. *Wegen Bemerkung 7.5 ist $\tau(C)$ unabhängig von der Wahl der Basen der F_i.*

2. *$\tau(C)$ ist unabhängig von der Wahl der Moduln F_i.*

Beweis von 2: Für $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ sei F_i' ein freier, endlich erzeugter R-Modul mit geradem Rang, so dass $B_i \oplus F_i'$ frei ist. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\tau\left(C \oplus \bigoplus_{i=1}^{m-1} C(F_i', i)\right) &\stackrel{\clubsuit}{=} \tau\left(C \oplus \bigoplus_{i=1}^{m-1} C(F_i', i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{m-1} C(F_i, i)\right) \\
&\stackrel{\spadesuit}{=} \tau\left(C \oplus \bigoplus_{i=1}^{m-1} C(F_i, i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{m-1} C(F_i', i)\right) \\
&\stackrel{\clubsuit}{=} \tau\left(C \oplus \bigoplus_{i=1}^{m-1} C(F_i, i)\right)
\end{aligned}$$

($\clubsuit$) folgt jeweils aus Definition 7.3. ($\spadesuit$) folgt mit Bemerkung 7.5, da die Kettenkomplexe gleich sind und die gewählten Basen durch eine Permutation mit positivem Vorzeichen auseinander hervorgehen. □

Lemma 7.4 und Bemerkung 7.5 gelten nun auch im allgemeinen Fall.

7.2 Eulercharakteristik eines Kettenkomplexes

Sei $C = (\ 0 \longrightarrow C_m \xrightarrow{\partial_{m-1}} C_{m-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0 \longrightarrow 0\ )$ ein Kettenkomplex von freien, endlich erzeugten R-Moduln.

Definition 7.10 $\chi(C) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \operatorname{rk} C_i$ *heißt die* ***Eulercharakteristik*** *von* C.

Satz 7.11 *Ist* C *exakt, so gilt* $\chi(C) = 0$.

Beweis: Sind die Moduln B_i für $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ frei, so spaltet die Sequenz (39) und daher gilt für $i \in \{0, \ldots, m\}$

$$\operatorname{rk} C_i = \operatorname{rk} B_i + \operatorname{rk} B_{i-1}. \tag{40}$$

Aus (40) folgt sofort $\chi(C) = 0$.

Sind die Moduln B_i nicht frei, so benutze Lemma 7.7 und die Tatsache, dass gilt $\chi(C) = \chi(C \oplus C(F, i))$ falls F ein freier, endlich erzeugten R-Modul und $i \in \mathbb{N}$, und wende schließlich (40) auf den „stabilisierten Komplex“ an. □

Bemerkung 7.12 *Ist* R *ein Körper, so werden aus Moduln Vektorräume und es gilt*

$$\dim C_i = \dim H_i(C) + \dim B_i + \dim B_{i-1}.$$

Es folgt $\chi(C) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \dim H_i(C)$.

7.3 Berechnung der Torsion mit τ-Ketten

Sei $C = (\ 0 \longrightarrow C_m \xrightarrow{\partial_{m-1}} C_{m-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0 \longrightarrow 0\ )$ ein exakter Kettenkomplex von freien, endlich erzeugten R-Moduln und für $i \in \{0, \dots, m\}$ sei eine Basis c_i von C_i gegeben.

Sei $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Die darstellende Matrix der Abbildung $\partial_i \colon C_{i+1} \to C_i$ bzgl. der gegebenen Basen sei $A_i = (a^i_{jk})_{\substack{j=1,\dots,\mathrm{rk}\, C_i \\ k=1,\dots,\mathrm{rk}\, C_{i+1}}}$. Die Koordinaten des Bildes des k-ten Basiselements der Basis c_{i+1} in der Basis c_i bilden die k-te Spalte von A_i.

Definition 7.13 *Eine* ***Matrixkette*** *α von C ist ein Tupel von Mengen $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ mit $\alpha_i \subset \{1, \dots, \mathrm{rk}\, C_i\}$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $\alpha_0 = \emptyset$.*

Wir setzen S_i gleich der Untermatrix von A_i, die durch die Einträge a^i_{jk} mit $k \in \alpha_{i+1}$ und $j \notin \alpha_i$ gebildet wird.

Die Matrixkette α heißt ***τ-Kette****, falls $S_0, \dots, S_{m-1}$ quadratische Matrizen sind. Eine τ-Kette α heißt* ***nicht entartet****, falls $\mathrm{rk}\, S_i = |\alpha_{i+1}|$ für $i = 0, \dots, m-1$.*

Satz 7.14 *Jede τ-Kette $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ von C mit $\mathrm{rk}\, S_i = |\alpha_{i+1}|$ für alle geraden $i \in \{0, \dots, m-1\}$ ist nicht entartet und es gilt*

$$\tau(Q \otimes C) = (-1)^N \prod_{i=0}^{m-1} (\det S_i)^{(-1)^{i+1}}.$$

Dabei bezeichnet Q den Quotientenkörper von R und $Q \otimes C$ den Kettenkomplex $0 \longrightarrow Q \otimes_R C_m \longrightarrow Q \otimes_R C_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q \otimes_R C_0 \longrightarrow 0$.

Beweis: Setze $r_i := \mathrm{rk}\, A_i \geq 0$. Für $i \in \{0, \dots, m-1\}$ ist

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}\, \partial_i \hookrightarrow C_i \longrightarrow C_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0 \tag{41}$$

exakt, da C exakt ist. Die Eulercharakteristik von (41) ist demnach 0, d. h.

$$r_i = \mathrm{rk}(\mathrm{im}\, \partial_i) = \mathrm{rk}\, C_i - \mathrm{rk}\, C_{i-1} + \cdots + (-1)^i\, \mathrm{rk}\, C_0. \tag{42}$$

Die Matrix S_i hat $\mathrm{rk}\, C_i - |\alpha_i|$ Zeilen und $|\alpha_{i+1}|$ Spalten. Da die Matrix S_j für $j \in \{0, \dots, m-1\}$ quadratisch ist, folgt

$$\begin{aligned} |\alpha_{i+1}| &= \mathrm{rk}\, C_i - |\alpha_i| \\ &\overset{\clubsuit}{=} \mathrm{rk}\, C_i - \mathrm{rk}\, C_{i-1} + \cdots + (-1)^i\, \mathrm{rk}\, C_0 + (-1)^{i+1} |\alpha_0| \overset{\spadesuit}{=} r_i. \end{aligned} \tag{43}$$

($\clubsuit$) erhält man induktiv. ($\spadesuit$) folgt wegen (42) und $|\alpha_0| = 0$.

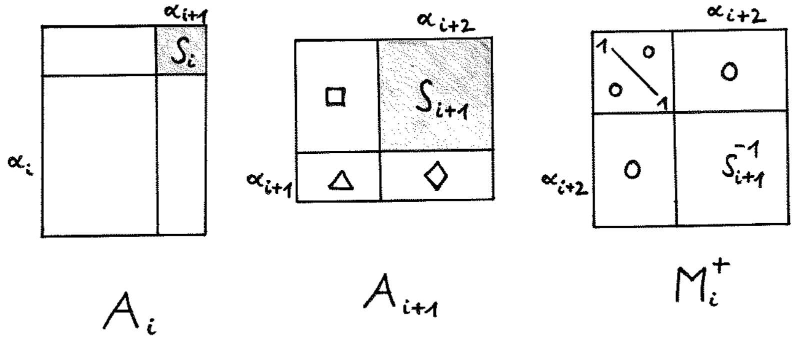
Gleichung (43) besagt, dass S_i eine $r_i \times r_i$-Matrix ist. Falls i gerade ist, so gilt laut Voraussetzung $\mathrm{rk}\, S_i = r_i$.

Wir beweisen nun, dass auch für ungerade i gilt $\operatorname{rk} S_i = r_i$. Nach Permutation der Elemente der Basen c_i ($i \in \{0, \ldots, m\}$) können wir annehmen, dass $\alpha_i = \{r_i + 1, \ldots, \operatorname{rk} C_i\}$. Die Permutation der Basen ändert das Vorzeichen von $\tau(Q \otimes C)$ falls

$$N := \sum_{i=0}^{m} \left| \{(x, y) | x < y, x \in \alpha_i, y \in \{1, \ldots, \operatorname{rk} C_i\} \backslash \alpha_i\} \right|$$

ungerade ist. Ist N gerade, so ändert sich $\tau(Q \otimes C)$ durch die Permutation nicht.

Sei i ungerade. Wegen $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ gilt $A_i A_{i+1} = 0$. Wir sehen im Folgenden alle Matrizen als Matrizen über Q an.



$$A_{i+1} M_i^+ = \begin{pmatrix} \Box & I \\ \triangle & \Diamond' \end{pmatrix}$$

Aus $A_i A_{i+1} M_i^+ = 0$ folgt nun $A_i \cdot \begin{pmatrix} \Box & I \\ \triangle & \Diamond' \end{pmatrix} = 0$. Insbesondere sind alle Spalten von A_i Linearkombinationen der Spalten von A_i mit Index aus α_{i+1}. Analog erhält man aus $A_{i-1} A_i = 0$ und

$$M_i^- := \begin{pmatrix} S_{i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

nach Berechnung von $M_i^- A_{i-1}$, dass alle Zeilen von A_i Linearkombinationen der Zeilen mit Index aus $\{1, \ldots, \operatorname{rk} C_i\} \backslash \alpha_i$ sind. Es folgt $\operatorname{rk} S_i = r_i$.

Für $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ hat S_i also maximalen Rang. Die Spalten von A_i mit Index aus α_{i+1} bilden eine Basis b_i von $B_i = \operatorname{im}(\partial_i)$. Als Urbild $\widetilde{b}_i$ der Basis b_i in C_{i+1} nehmen wir die letzten r_i Elemente von c_{i+1}. Dann gilt

$$[b_i b_{i-1} / c_i] = [b_i \widetilde{b}_{i-1} / c_i] = \det \begin{pmatrix} S_i & 0 \\ * & I \end{pmatrix} = det(S_i).$$

$\Box$

7.4 Berechnung der Torsion mit Homologie

Der Ring R sei noethersch und faktoriell und

$$C = (\ 0 \longrightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0 \longrightarrow 0\ )$$

sei ein Kettenkomplex von freien und endlich erzeugten R-Moduln. Q bezeichne den Quotientenkörper von R. Für C_i sei eine Basis $c_i = (c_1^i, \ldots, c_{k_i}^i)$ gegeben ($i \in \{0, \ldots, m\}$).

Satz 7.15 *Für die Homologie des Kettenkomplexes C gelte $\operatorname{rk} H_i(C) = 0$ für $i \in \{0, \ldots, m\}$. Dann ist der Kettenkomplex $Q \otimes_R C$ exakt und bzgl. der induzierten Basen gilt*

$$\tau(Q \otimes_R C) \in \prod_{i=0}^{m} \Delta_0(H_i(C))^{(-1)^{i+1}} \in Q/R^*.$$

Bemerkung 7.16 *Da der Modul C_i frei ist, ist eine natürliche Inklusion $C_i \hookrightarrow Q \otimes_R C_i$ gegeben. Die Basis c_i ist auch eine Basis für $Q \otimes_R C_i$ und jede Darstellungsmatrix der Abbildung $\partial_i \colon C_{i+1} \to C_i$ ist, wenn man die Einträge als Elemente in Q auffasst, auch darstellende Matrix für die Abbildung $\partial_i^{\otimes} \colon Q \otimes_R C_{i+1} \to Q \otimes_R C_i$.*

Um Satz 7.15 zu beweisen, benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 7.17 *Die darstellende Matrix von ∂_i bzgl. dieser Basen sei A_i. Wir bezeichnen das von allen Unterdeterminanten von A_i der Ordnung $\operatorname{rk} A_i$ erzeugte Ideal mit I_i. Im Fall $\operatorname{rk} A_i = 0$ setze $I_i := R$. Für $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ gilt*

$$\Delta_0(\operatorname{Tors} H_i(C)) = \operatorname{ggT}(I_i).$$

Beweis: Mit $\operatorname{coker} \partial_i$ wird der R-Modul $C_i / \operatorname{im} \partial_i$ bezeichnet. Die folgende Sequenz ist exakt:

$$C_{i+1} \xrightarrow{\partial_i} C_i \longrightarrow \operatorname{coker} \partial_i \longrightarrow 0$$

Die Matrix A_i^T ist somit eine Präsentationsmatrix von $\operatorname{coker} \partial_i$. I_i ist laut Definition das erste nicht verschwindende Ideal in der Kette der Elementarideale

$$E_0(\operatorname{coker} \partial_i) \subset E_1(\operatorname{coker} \partial_i) \subset \cdots,$$

also gilt $\operatorname{ggT}(I_i) = \Delta_{l_i}(\operatorname{coker} \partial_i)$ wobei $l_i := \operatorname{rk}(\operatorname{coker} \partial_i)$. Mit Lemma 1.16 folgt $\operatorname{ggT}(I_i) = \Delta_0(\operatorname{Tors}(\operatorname{coker} \partial_i))$.

Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_i(C) \overset{\imath}{\hookrightarrow} \operatorname{coker} \partial_i \xrightarrow{\partial_{i-1}} B_{i-1} \longrightarrow 0\,.$$

Da B_{i-1} Untermodul eines freien Moduls ist, gilt $\operatorname{Tors}(B_{i-1}) = 0$. Sei $x \in \operatorname{Tors}(\operatorname{coker} \partial_i)$, $x \neq 0$. Es gibt $a \in R\backslash\{0\}$ mit $ax = 0$. Nun gilt $0 = \partial_{i-1}(ax) = a \cdot \partial_{i-1}(x)$ und da R nullteilerfrei ist, gilt auch $\partial_{i-1}(x) = 0$. Wegen $\operatorname{im} \imath = \ker \partial_{i-1}$ folgt nun $x \in H_i(C)$. Wir erhalten also $\operatorname{Tors}(\operatorname{coker} \partial_i) = \operatorname{Tors}(H_i(C))$.

Schließlich gilt $\operatorname{ggT}(I_i) = \Delta_0(\operatorname{Tors}(\operatorname{coker} \partial_i)) = \Delta_0(\operatorname{Tors}(H_i(C)))$. □

Nun zum Beweis von Satz 7.15:

Wir prüfen zuerst, ob $Q \otimes_R C$ exakt ist. Sei $x \in \ker \partial_i^{\otimes}$. Es gibt $a \in R\backslash\{0\}$, so dass $ax \in C_{i+1}$. Es gilt $\partial_i(ax) = a \cdot \partial_i^{\otimes}(x) = 0$. Wegen $H_i(C) = \operatorname{Tors}(H_i(C))$ gibt es $a' \in R\backslash\{0\}$, so dass $a'ax \in \operatorname{im} \partial_{i+1}$. Also gibt es $y \in C_{i+2}$ mit $a'ax = \partial_{i+1}(y)$. Da R nullteilerfrei ist, gilt $a'a \neq 0$ und $x = \partial_{i+1}^{\otimes}(a'a)^{-1}y)$, das heißt $x \in \operatorname{im} \partial_{i+1}^{\otimes}$. Damit ist bewiesen, dass $Q \otimes_R C$ exakt ist.

Wie in Lemma 7.17 bezeichnen wir mit A_i die darstellende Matrix von ∂_i und mit I_i das Ideal, das von allen Unterdeterminanten von A_i der Ordnung $\operatorname{rk} A_i$ erzeugt wird. Mit Lemma 7.17 und $H_i(C) = \operatorname{Tors}(H_i(C))$ folgt nun

$$\operatorname{ggT}(I_i) = \Delta_0(\operatorname{Tors}(H_i(C))) = \Delta_0(H_i(C)).$$

Setze $I_{even} := \prod_{\substack{i \in \{0,\ldots,m-1\} \\ i \text{ gerade}}} I_i$ und $I_{odd} := \prod_{\substack{i \in \{0,\ldots,m-1\} \\ i \text{ ungerade}}} I_i$. Wir versuchen zu zeigen, dass gilt

$$\tau(Q \otimes_R C) \cdot I_{even} = I_{odd}. \tag{44}$$

Mit Lemma 1.11 folgt dann die Behauptung des Satzes.

Für gerades $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ wählen wir eine quadratische Untermatrix S_i von A_i mit $\operatorname{rk} A_i$ Zeilen bzw. Spalten, so dass gilt $\operatorname{rk} S_i = \operatorname{rk} A_i$. Dadurch ist eine Matrixkette festgelegt. Also sind auch für ungerade $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ $\operatorname{rk} A_i \times \operatorname{rk} A_i$-Untermatrizen S_i von A_i festgelegt. Wegen $\operatorname{rk} A_i + \operatorname{rk} A_{i-1} = \operatorname{rk} C_i$ handelt es sich dabei um eine τ-Kette. Satz 7.14 besagt nun, dass diese τ-Kette nicht entartet ist und dass gilt

$$\tau(Q \otimes_R C) \cdot \prod_{\substack{i \in \{0,\ldots,m-1\} \\ i \text{ gerade}}} \det(S_i) = \pm \prod_{\substack{i \in \{0,\ldots,m-1\} \\ i \text{ ungerade}}} \det(S_i) \in I_{odd}.$$

Mit der Definition der Ideale I_i für $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ folgt

$$\tau(Q \otimes_R C) \cdot I_{even} \subset I_{odd}. \tag{45}$$

Die selbe Argumentation angewandt auf den Kettenkomplex $C'_* := C_{*+1}$ liefert

$$\tau(Q \otimes_R C)^{-1} \cdot I_{odd} \subset I_{even}. \tag{46}$$

Aus (45) und (46) folgt (44). □

7.5 Zusammenhang von Torsion und Alexanderpolynom

Sei $\mathfrak{L}$ eine Verschlingung mit κ Zusammenhangskomponenten. Wir haben in Abschnitt 4.1 zu einer reduzierten Wirtingerpräsentation von $\mathfrak{L}$ einen 2-dimensionalen CW-Komplex X konstruiert und gesehen, dass X auf der maximalen abelschen Überlagerung $\widehat{X}$ die Struktur eines CW-Komplexes induziert. Die Gruppen $C_i(\widehat{X})$ des zellulären Kettenkomplexes ($i \in \{0,1,2\}$) sind freie, endlich erzeugte $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]$-Moduln.

Wir wollen in diesem Abschnitt die Torsion $\tau(X)$ des Komplexes

$$Q(\mathfrak{Z}^\kappa) \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]} C_*(\widehat{X})$$

mit dem Alexanderpolynom $\Delta_0(\mathfrak{L})$ vergleichen.

Dazu brauchen wir Basen der $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]$-Moduln $C_i(\widehat{X})$: Für jede Zelle von X wählen wir eine Urbildzelle unter der Überlagerungsabbildung $\widehat{X} \to X$ aus. Wir können die 1-Zellen von $\widehat{X}$ so wählen, dass sie den gleichen Anfangspunkt $\widehat{P}$ haben. Diese 1-Zellen nehmen wir als Basis von $C_1(\widehat{X})$. Als Basis von $C_0(\widehat{X})$ nehmen wir $\widehat{P}$.

Um nun Satz 7.15 anzuwenden, schauen wir uns die Homologie des Komplexes $0 \longrightarrow C_2(\widehat{X}) \longrightarrow C_1(\widehat{X}) \longrightarrow C_0(\widehat{X}) \longrightarrow 0$ an. Es gilt $H_1(\widehat{X}) \cong H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c})$. Nun gilt $\operatorname{rk} H_1(\widehat{\mathfrak{L}^c}) = 0$ genau dann, wenn $\Delta_0(\mathfrak{L}) \neq 0$. Im Fall $\Delta_0(\mathfrak{L}) = 0$ folgt also $\tau(X) = 0$. Sei im Folgenden $\Delta_0(\mathfrak{L}) \neq 0$. $\widehat{X}$ ist wegzusammenhängend, es gilt also

$$H_0(\widehat{X}) = \frac{C_0(\widehat{X})}{\operatorname{im}(C_1(\widehat{X}) \to C_0(\widehat{X}))} \cong \frac{\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]}{\Im\mathfrak{Z}^\kappa} \cong \mathbb{Z}.$$

Hier bezeichnet $\Im\mathfrak{Z}^\kappa$ das in Definition 4.4 eingeführte Augmentationsideal. Die Skalarmultiplikation des $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]$-Moduls $\mathbb{Z}$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa] \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (p,n) & \mapsto & \varepsilon(p) \cdot n, \end{array}$$

wobei ε die Augmentation von $\mathfrak{Z}^\kappa$ bezeichnet (vgl. Definition 4.4). Somit erhalten wir $\operatorname{rk} H_0(\widehat{X}) = 0$. Mit Lemma 4.12 ergibt sich folgende Präsentation von $H_0(\widehat{X}) \cong \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]^\kappa & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa] & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ e_i & \longmapsto & t_i - 1 & & & & \end{array}$$

Dabei bezeichnet $e_1, \dots, e_\kappa$ die Standardbasis von $\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]^\kappa$. Die zugehörige Präsentationsmatrix ist $A_0 = \begin{pmatrix} t_1 - 1 \\ \vdots \\ t_\kappa - 1 \end{pmatrix} \in Mat_{\mathbb{Z}[\mathfrak{Z}^\kappa]}(\kappa, 1)$. Für $\Delta_0(H_0(\widehat{X}))$

erhalten wir mit Lemma 4.13

$$\Delta_0(H_0(\widehat{X})) = \begin{cases} \pm(t-1)\cdot\mathfrak{Z} & \text{falls } \kappa = 1 \\ \pm\mathfrak{Z}^\kappa & \text{falls } \kappa > 1. \end{cases}$$

Wir untersuchen nun $H_2(\widehat{X})$. Es gilt $H_2(\widehat{X}) = \ker(C_2(\widehat{X}) \to C_1(\widehat{X}))$. Wir setzen $r := \operatorname{rk} C_2(\widehat{X})$ und $n := \operatorname{rk} C_1(\widehat{X})$. n ist die Zahl der Erzeuger der reduzierten Wirtingerpräsentation und r die Anzahl der Relatoren. Es gilt also $n \geq r+1$. A_2 bezeichne die Darstellungsmatrix der Abbildung $C_2(\widehat{X}) \to C_1(\widehat{X})$ bzgl. der gewählten Basen. Wir nehmen $n > r+1$ an. Es folgt $\Delta_0(\mathfrak{L}) \overset{Satz\ 4.17}{=} \Delta_1^{CW}(\mathfrak{L}) \overset{(24)}{=} \Delta_1(A_2^T) = 0$ wegen des Formats der Matrix A_2. $\Delta_0(\mathfrak{L}) \neq 0$ impliziert also $n = r+1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \Delta_0(\mathfrak{L}) \neq 0 \\ \iff & \Delta_1(A_2^T) \neq 0 \\ \iff & \operatorname{rk}_{Q(\mathfrak{Z}^\kappa)} A_2 = r \\ \iff & Q(\mathfrak{Z}^\kappa) \otimes C_2(\widehat{X}) \overset{A_2}{\to} Q(\mathfrak{Z}^\kappa) \otimes C_1(\widehat{X}) \text{ ist injektiv} \\ \iff & C_2(\widehat{X}) \overset{A_2}{\to} C_1(\widehat{X}) \text{ ist injektiv} \\ \iff & \operatorname{rk} H_2(\widehat{X}) = \operatorname{rk}(\ker A_2) = 0 \end{aligned}$$

Wir können also Satz 7.15 anwenden und erhalten folgenden Zusammenhang zwischen dem Alexanderpolynom und $\tau(X)$:

Satz 7.18

$$\tau(X) \in \begin{cases} (t-1)^{-1}\cdot\Delta_0(\mathfrak{L}) & \textit{falls } \kappa = 1 \\ \Delta_0(\mathfrak{L}) & \textit{falls } \kappa > 1 \end{cases}$$

Beweis: Es bleibt noch zu zeigen $\Delta_0(H_2(\widehat{X})) = 1$. Aus $\operatorname{rk} H_2(\widehat{X}) = 0$ folgt $H_2(\widehat{X}) = \operatorname{Tors} H_2(\widehat{X})$. $H_2(\widehat{X}) = \ker A_2$ ist aber ein Untermodul des freien Moduls $C_2(\widehat{X})$. Also gilt $\operatorname{Tors} H_2(\widehat{X}) = 0$ und es folgt $\Delta_0(H_2(\widehat{X})) = 1$. □

Abschließend wollen wir $\tau(X)$ auch noch mit Hilfe von nicht entarteten τ-Ketten berechnen.

$A_{2,k}$ bezeichne die Matrix, die durch Streichen der k-ten Zeile aus A_2 entsteht ($k \in \{1,\ldots,n\}$). Die darstellende Matrix der Abbildung $C_1(\widehat{X}) \to C_0(\widehat{X})$ hat die Form $(t_{i_1}-1,\ldots,t_{i_n}-1)$, wobei $i_j \in \{1,\ldots,\kappa\}$ dadurch gegeben ist, dass die Verschlingungszahl der i_j-ten Komponente von $\mathfrak{L}$ mit dem j-ten Erzeuger der Wirtingerpräsentation nicht Null ist. (Vergleiche mit dem Isomorphismus $Ab(G_{\mathfrak{L}}) \to \mathfrak{Z}^\kappa$ aus Lemma 2.15.) Nach Satz 7.14 ist in unserem Fall also jede denkbare τ-Kette des Kettenkomplexes $C_*(\widehat{X})$ nicht entartet. Für $k \in \{1,\ldots,n\}$ gilt $\tau(X) = \det A_{2,k}\cdot(t_{i_k}-1)^{-1}$. Im Fall $\kappa = 1$ folgt mit Satz 7.18

$$\Delta_0(\mathfrak{L}) = [\det A_{2,k}] = \Delta_1(A_2^T) = \Delta_1^{CW}(\mathfrak{L}) \text{ für } k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Sei $\kappa > 1$. Es gilt $\det A_{2,k} = \tau(X) \cdot (t_{i_k} - 1) \in \Delta_0(\mathfrak{L}) \cdot (t_{i_k} - 1)$ und daraus folgt $\Delta_0(\mathfrak{L}) = \mathrm{ggT}(\det A_{2,1}, \ldots, \det A_{2,n}) = \Delta_1^{CW}(\mathfrak{L})$. Wir haben mit Hilfe der Torsion erneut einen Teil von Satz 4.17 bewiesen. Beachte aber, dass wir dazu die Tatsache $\Delta_0(\mathfrak{L}) = 0 \iff \Delta_1^{CW}(\mathfrak{L}) = 0$ benutzt haben.

Literatur

[1] S. Bosch: Algebra, 2.Auflage, Springer-Verlag (1996)

[2] R. Brüske, F. Ischebeck, F. Vogel: Kommutative Algebra, BI-Wissenschaftsverlag (1989)

[3] S. Lang: Algebra, 6.Auflage, Addison-Wesley (1974)

[4] G. Scheja, U. Storch: Lehrbuch der Algebra Teil 1, B. G. Teubner (1980)

[5] G. E. Bredon: Topology and Geometry, Graduate Texts in Math. 139, Springer-Verlag (1993)

[6] M. J. Greenberg: Lectures on Algebraic Topology, W. A. Benjamin, Inc. (1966)

[7] K. Jänich: Topologie, 5.Auflage, Springer-Verlag (1996)

[8] W. S. Massey: Algebraic Topology: An Introduction, Graduate Texts in Math. 56, Springer-Verlag (1977)

[9] J. W. Alexander: Topological invariants of knots and links, Transactions of the American Mathematical Society Vol. 30 (1928)

[10] R. C. Blanchfield: Intersection theory of Manifolds with operators with applications to knot theory, Annals of Mathematics Vol. 65 (1957)

[11] G. Burde, H. Zieschang: Knots, Studies in Math. 5, Walter de Gruyter (1985)

[12] R. H. Crowell, R. H. Fox: Introduction to Knot Theory, Graduate Texts in Math. 57, Springer-Verlag (1977)

[13] R. H. Crowell, D. Strauss: On the elementary ideals of link modules, Trans. Amer. Math. Soc 143 (1969)

[14] J. A. Hillman: Alexander ideals of links, Lecture Notes in Math. 895, Springer-Verlag (1981)

[15] L. H. Kauffman: On Knots, Annals of Mathematics Studies 115, Princeton University Press (1987)

[16] W. Lück: Das Jones-Polynom und Entwirrungsinvarianten in der Knotentheorie, Preprint-Reihe des Fachbereichs Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz (1996)

[17] J. W. Milnor: Infinite Cyclic Covers, Conf. Topology of Manifolds 1968 (ed. J. G. Hocking), Prindle, Weber and Schmidt

[18] J. W. Milnor: A duality theorem for Reidemeister torsion, Annals of Mathematics Vol. 76 (1962)

[19] K. Murasugi: Knot Theory and its Applications, Birkhäuser (1996)

[20] K. Reidemeister: Knotentheorie, Springer-Verlag (1932)

[21] G. de Rham: Introduction aux Polynomes d'un Nœud, L'Enseignement Mathématique 13 (1968)

[22] D. Rolfsen: Knots and Links, Publish or Perish, Inc. (1990)

[23] G. Torres, R. H. Fox: Dual presentations of the group of a knot, Annals of Mathematics Vol. 59 (1954)

[24] V. G. Turaev: Introduction to combinatorial torsions, Birkhäuser (2001)

[25] V. G. Turaev: Reidemeister torsion in knot theory, Russian Math. Surveys (1986)

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt.