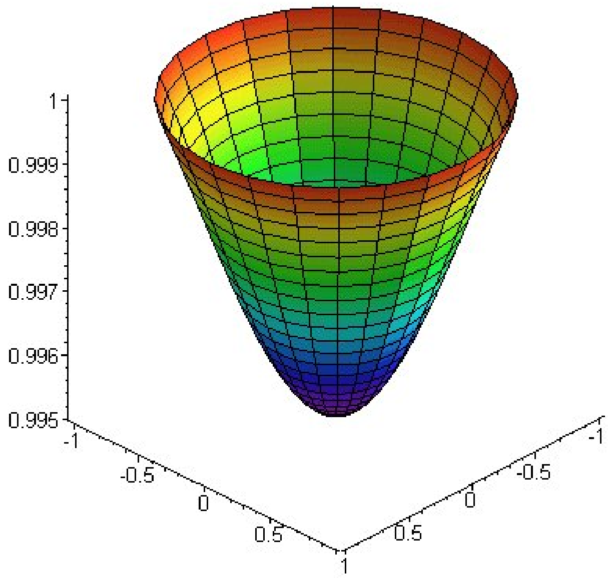
Spektralsatz des Laplace-Operators

- ein Vortrag im Rahmen des De Rham-Kohologieseminars im SS 2004 -



Ulrich Pennig

6. Juli 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Was bisher geschah ... **2**

2.1 Elliptische Ungleichung . . . 3

2.2 Selbstadjungiertheit auf $L^2(\Omega^k(M))$ . . . 3

2.3 Elliptische Regularität . . . 4

3 Spektralzerlegung **4**

3.1 Spektraltheorie kompakter, selbstadjungierter Operatoren . . . 7

3.2 Spektralsatz des LAPLACE-Operators . . . 8

3.3 Funktionalkalkül . . . 9

3.3.1 Glättende Operatoren . . . 11

4 Die Wärmeleitungsgleichung **14**

1 Einleitung

Nachdem nun die genaue Definition des Laplace-Operators und die wichtigsten Abschätzungen, dessen Regularität betreffend, geklärt wurden, sollen an dieser Stelle dessen funktionalanalytische Eigenschaften näher beleuchtet werden. Im folgenden zeigt sich, dass diese Eigenschaften im wesentlichen rein auf den bereits bekannten Ungleichungen beruhen, so dass dieser Vortrag eigentlich in den größeren Themenkreis der sogenannten *elliptischen Differentialoperatoren* einzuordnen ist.

Ziel wird es sein, zu beweisen, dass das Spektrum des an sich unbeschränkten Δ-Operators in ein rein diskretes und daher erstaunlich „harmloses“ Eigenwertspektrum zerfällt, so dass der Hilbertraum H unter seiner Wirkung in orthogonale Eigenräume separiert. Mit dieser Erkenntnis läßt sich darauf ein *Funktionalkalkül* etablieren, das die schöne Eigenschaft besitzt, für eine bestimmte Klasse von Funktionen, *glättende Operatoren*, d.h. Integraloperatoren mit einem glatten Kern zu liefern. Abschließend soll anhand der *Wärmeleitungsgleichung*, die aufgrund ihrer Verbindung zum Atiyah-Singer-Indexsatz Berühmtheit erlangte, ein physikalisches Beispiel für die Anwendung des Funktionalkalküls betrachtet werden.

2 Was bisher geschah ...

An dieser Stelle sollen die wichtigsten Abschätzungen des Laplace-Operators noch einmal zitiert werden. Außerdem sind für das folgende einige funktionalanalytische Definitionen und Sätze von Nöten, die ebenfalls hier schon zur Sprache kommen.

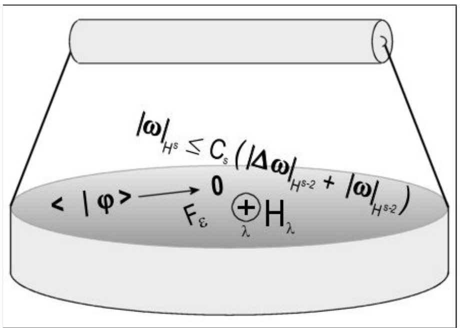


Abb. 1: Elliptische Toolbox

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\Omega^k(M)$ der Raum der k-Formen über dieser. Bezüglich einer Karte nimmt ein Element ω aus diesem Raum die folgende Gestalt an:

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I \quad \text{mit} \quad dx^I = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_k \quad \text{und} \quad i_1 < \cdots < i_k \ .$$

Damit läßt sich $\Omega^k(M)$ als Vektorbündel über M auffassen, d.h. lokal sind die k-Formen nichts anderes als *vektorwertige Funktionen* über der Mannigfaltigkeit oder *Schnitte* im Bündel, die durch den Laplace-Operator wieder auf Schnitte abgebildet werden, schließlich beschränkt sich dessen Wirkung auf die Koordinatenfunktionen ω_I:

$$\Delta\omega = \sum_I \left(\Delta\, \omega_I\right)\, dx^I$$

Vermöge der Definition des *globalen Skalarproduktes* zweier Formen ω und τ ...

$$\langle\omega|\,\tau\rangle := \int_M (\omega, \tau)\, \mathrm{vol}(M) = \int_M \tau \wedge *\omega = \int_M \omega \wedge *\tau \ .$$

...läßt sich auch die Bezeichnung $L^2\big(\Omega^k(M)\big)$ mit Sinn füllen. Außerdem sind die für eine Regularitätsanalyse des LAPLACE-Operators unabdingbaren SOBOLEV-Räume auf beliebige Mannigfaltigkeiten übertragbar, so dass auch $H^s\Omega^k(M)$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$ wohldefiniert ist. Natürlich gelten damit auch die beiden zentralen Einbettungssätze von SOBOLEV und RELLICH für diese Räume.

Satz 2.1 (Sobolev) *Für $p \in \mathbb{N}_0$ mit $p > \frac{n}{2}$, wobei n die Dimension der Mannigfaltigkeit bezeichne, ist der Raum $H^{s+p}\Omega^k(M)$ stetig eingebettet in $C^s(\Omega^k(M))$.*

Satz 2.2 (Rellich) *Für $0 <= s_1 < s_2$ ist die Inklusion $H^{s_2}\Omega^k(M) \hookrightarrow H^{s_1}\Omega^k(M)$ ein kompakter, linearer Operator.*

2.1 Elliptische Ungleichung

Der LAPLACE-Operator ist als Differentialoperator zweiter Ordnung stetig, falls er in folgender Weise aufgefasst wird:

$$\begin{aligned} \Delta : H^s\Omega^k(M) &\longrightarrow H^{s-2}\Omega^k(M) \quad \text{d.h.} \\ ||\,\Delta\omega||_{H^{s-2}} &\leq C_s\,||\,\omega||_{H^s} \end{aligned} \tag{1}$$

Zwar läßt sich diese Ungleichung nicht umkehren, dennoch existiert eine äußert wichtige Abschätzung in die andere Richtung, die als *elliptische Ungleichung* bekannt ist. Für $s = 2$ ergibt sich wegen $H^0\Omega^k(M) = L^2(\Omega^k(M))$ als ein Spezialfall die GARDING-*Ungleichung* (3):

$$||\,\omega||_{H^s} \;\leq\; C_s\,(||\,\Delta\omega||_{H^{s-2}} + ||\,\omega||_{H^{s-2}})\ , \tag{2}$$

$$||\,\omega||_{H^2} \;\leq\; C\ (||\,\Delta\omega||_{L^2} + ||\,\omega||_{L^2})\ . \tag{3}$$

2.2 Selbstadjungiertheit auf $L^2(\Omega^k(M))$

Betrachten wir Δ als unbeschränkten Operator auf $L^2(\Omega^k(M))$ können wir keine Stetigkeit seinerseits erwarten. Als Ersatz hierfür betrachten wir den Abschluß des Graphen, der uns zu einem – im Sinne der *unbeschränkten linearen Abbildungen* – selbstadjungierten Operator führt. Im Schnelldurchlauf...

Definition 2.1 *Sei T ein unbeschränkter Operator auf H. Der **Graph** G_T von T ist der folgende Unterraum von $H \oplus H$:*

$$G_T = \{\ \langle\ x \mid Tx\ \rangle\ \mid x \in \mathrm{dom}(T)\ \}\ .$$

Satz 2.3 *Der Abschluß $\overline{G}$ des Graphen von Δ ist wieder ein Graph und definiert damit einen Operator $\overline{\Delta} : H^2\Omega^k(M) \longrightarrow L^2(\Omega^k(M))$.*

Die Suche nach $x, y \in L^2(\Omega^k(M))$, die die Differentialgleichung $\Delta x = y$ erfüllen, führt uns auf den Begriff der *schwachen Lösung*, genauer stellen $x, y \in L^2(\Omega^k(M))$ eine solche dar, falls sie der Bedingung...

$$\langle\ x \mid \Delta s\rangle = \langle\ y \mid s\ \rangle \quad \forall s \in C^\infty(\Omega^k(M))$$

…genügen (nur dies ergibt auch für $x, y \in L^2(\Omega^k(M))$ einen Sinn). Dass diese Lösungen gar nicht so schwach sind, wie ihr Name vermuten läßt, ist Aussage des folgendes Satzes.

Satz 2.4 *Seien $x, y \in L^2(\Omega^k(M))$, ferner erfüllen sie die Bedingung $\Delta x = y$ im schwachen Sinn. Dann ist $x \in H^2\Omega^k(M) = \mathrm{dom}(\overline{\Delta})$ und $\overline{\Delta}x = y$.*

Folglich ist im Sinne unbeschränkter, selbstadjungierter Operatoren $\mathrm{dom}\left(\overline{\Delta}\right) = \mathrm{dom}\left(\overline{\Delta}^*\right)$ und somit $\overline{\Delta}$ auf $L^2(\Omega^k(M))$ selbstadjungiert!

2.3 Elliptische Regularität

Eine der erstaunlichsten Eigenschaften des Δ-Operators besteht darin, dass Lösungen von Differentialgleichungen der Form $\overline{\Delta}s = 0$ für $s \in H^2\Omega^k(M)$ „glatter“ sind, als eigentlich zu erwarten wäre. Genaugenommen sind sie sogar unendlich oft differenzierbar, eine Eigenschaft, die auch als *elliptische Regularität* bezeichnet wird.

Satz 2.5 (elliptische Regularität) *Der Kern des Operators $\overline{\Delta}$ ist Teilmenge der glatten Schnitte $C^\infty(\Omega^k(M))$.*

Per Induktion folgt dies aus einem stärkeren Argument der folgenden Form:

Satz 2.6 *Sei $s \geq 2$ und seien $x, y \in H^s\Omega^k(M)$. Ferner gelte $\overline{\Delta}x = y$. Dann ist $x \in H^{s+1}\Omega^k(M)$.*

3 Spektralzerlegung

Ziel dieses Kapitels ist es, die genaue Form des Spektrums $\sigma(\overline{\Delta})$ des Laplace-Operators zu bestimmen und den Raum $\mathcal{H} = L^2(\Omega^k(M))$ – entsprechend der Erkenntnis, dass σ nur aus diskreten Eigenwerten besteht – in Eigenräume zu separieren. Hierzu verwenden wir eine orthogonale Zerlegung von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ in den Graphen von $\overline{\Delta}$ und sein orthogonales Komplement und betrachten anschließend die Projektion der Punkte $(x, 0) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ auf den Graphen $\overline{G}$, die an einen Operator Q gekoppelt ist, der wiederum die schöne Eigenschaft besitzt, *kompakt* zu sein. Die aus der Funktionalanalysis wohlbekannte Spektraltheorie kompakter Operatoren hilft uns dann, Schlussfolgerungen bezüglich der Eigenwerte auch für den Laplace-Operator zu ziehen. Doch zunächst…

Definition 3.1 *Sei $T : \mathcal{H} \supset \mathrm{dom}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ dicht definiert.*

a) $\rho(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \ : \ \mathrm{dom}(T) \longrightarrow \mathcal{H} \text{ ist bijektiv, und } (\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{B}(H)\right\}$ *heißt die* Resolventenmenge *von T.*

b) $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ *heißt das* Spektrum *von T.*

Anders als im Fall endlichdimensionaler Hilberträume besteht das Spektrum eines unbeschränkten linearen Operators nicht allein aus Eigenwerten. Für stetige Operatoren zerfällt es zum Beispiel in drei Teile: dem Punkt- oder Eigenwertspektrum, einem stetigen Anteil und dem Restspektrum.

Da $\overline{\Delta}$ über den Abschluss des Graphen definiert ist, lohnt es, zu verstehen, wie $\overline{G}$ in $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ „liegt“. Dazu der folgende ...

Satz 3.1 *Sei ...*

$$J \ : \ \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \quad ; \quad (x,y) \mapsto (y,-x) \ .$$

Dann gibt es eine Zerlegung in eine orthogonale Summe ...

$$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} = \overline{G} \oplus J\overline{G} \ .$$

Beweis

Sei $(x,y) \in G^{\perp}$. Dann bedeutet dies, dass für alle $s \in C^{\infty}(\Omega^k(M))$ gilt:

$$0 = \langle\ (x,y) \mid (s, \Delta s)\ \rangle = \langle\ x \mid s\ \rangle + \langle\ y \mid \Delta s\ \rangle$$

... nach Definition des Skalarproduktes auf $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Das bedeutet aber per Definition, dass $\Delta y = -x$ im schwachen Sinne. Da jetzt nach Satz (2.4) $y \in H^2\Omega^k(M)$, gilt $(y,-x) \in \overline{G}$ oder anders ausgedrückt: $(x,y) \in J\overline{G}$. □

Notiz Da der Satz lediglich die Selbstadjungiertheit im Sinne unbeschränkter Operatoren benutzt, läßt er sich ohne Probleme auf den allgemeineren Fall beliebiger selbstadjungierter Operatoren übertragen.

Nach (3.1) besitzt demnach jedes Element $(a,b) \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ eine Zerlegung der folgenden Art:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \overline{\Delta} x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\Delta} y \\ -y \end{pmatrix} \ .$$

Sei jetzt $p \ : \ \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \longrightarrow \overline{G} \oplus J\overline{G}$ die orthogonale Projektion auf den ersten Summanden $\overline{G}$, dann induziert dies einen Operator Q dergestalt, dass ...

$$p\,(x,0) = (Qx, \overline{\Delta} Qx) \in \overline{G} \ ,$$

... das heißt es existiert eine Zerlegung von $(x,0)$ mit einem $y \in H^2\Omega^k(M)$ in ...

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Qx \\ \overline{\Delta} Qx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\Delta} y \\ -y \end{pmatrix} \ . \tag{4}$$

Aufgrund der Linearität der Projektion p, die sich auf Q überträgt, handelt es sich bei letzterem tatsächlich um einen linearen Operator, dessen Bild zwangsläufig in $\mathrm{dom}(\overline{\Delta})$ liegt, also...

$$Q \ : \ L^2(\Omega^k(M)) \longrightarrow H^2\Omega^k(M) \ . \tag{5}$$

Aus Gleichung (4) gewinnen wir...

$$||x||^2_{L^2} = ||(x,0)||^2_{L^2} = ||Q\,x||^2_{L_2} + ||\overline{\Delta} Q\,x||^2_{L^2} + ||\overline{\Delta} y||^2_{L_2} + ||y||^2_{L^2} \geq ||Q\,x||^2_{L_2} + ||\overline{\Delta} Q\,x||^2_{L^2} \ , \quad (6)$$

... d.h. die Projektion des Vektors $(x, 0)$ ist „kürzer" als sein Urbild. Anschaulich ist dieser Tatbestand klar[1]. Aus der GARDING-Ungleichung erhalten wir:

$$||Q\,x||_{H^2} \leq C\,\left(||Q\,x||_{L^2} + ||\overline{\Delta} Q\,x||_{L^2}\right) \leq \widehat{C}\,||x||_{L^2} \ .$$

Ein Vergleich mit der Definition von Q (siehe unter (5)) zeigt, dass diese Abschätzung gerade die Stetigkeit des Operators bedeutet. Sei i die Inklusion ...

$$i \ : \ H^2\Omega^k(M) \longrightarrow L^2(\Omega^k(M)) \ ,$$

... die nach RELLICHs Einbettungssatz kompakt ist. Da Verknüpfungen kompakter Operatoren mit beschränkten Operatoren wieder kompakt sind, gilt dies auch für $i \circ Q$. Der Bequemlichkeit halber wollen wir diesen Operator auch mit Q bezeichnen. Ab jetzt gilt demnach:

$$Q \ : \ L^2(\Omega^k(M)) \longrightarrow L^2(\Omega^k(M)) \ .$$

Neben seiner Kompaktheit besitzt dieser Operator ein paar weitere äußerst nützliche Eigenschaften.

Satz 3.2 *Der Operator Q definiert wie oben ist ...*

(i) selbstadjungiert,

(ii) positiv,

(iii) injektiv und

(iv) es gilt $||Q|| \leq 1$.

Beweis

Seien $x, y \in H^2\Omega^k(M)$ die Schnitte aus Gleichung (4). Dann gilt: $x = \left(1 + \overline{\Delta}^{\,2}\right) Qx$ (hierbei ergibt das $\overline{\Delta}^{\,2}$ tatsächlich Sinn, denn $y = \overline{\Delta} Q\,x \in H^2\Omega^k(M) = \mathrm{dom}(\overline{\Delta})$).

(i) Es gilt für $z \in H^2\Omega^k(M)$ ...

$$\begin{aligned} \langle\, x \mid Qz \,\rangle &= \left\langle\, Qx + \overline{\Delta}^{\,2} Qx \mid Qz \,\right\rangle = \langle\, Qx \mid Qz \,\rangle + \left\langle\, \overline{\Delta}^{\,2} Qx \mid Qz \,\right\rangle \\ &= \langle\, Qx \mid Qz \,\rangle + \left\langle\, Qx \mid \overline{\Delta}^{\,2} Qz \,\right\rangle = \left\langle\, Qx \mid Qz + \overline{\Delta}^{\,2} Qz \,\right\rangle \\ &= \langle\, Qx \mid z \,\rangle \ . \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Selbstadjungiertheit des Operators $\overline{\Delta}$ auf $L^2(\Omega^k(M))$ ausgenutzt.

[1] Schön, dass die Anschauung hier noch was taugt. :–)

(ii) Für x ungleich dem Nullschnitt gilt:

$$\begin{aligned} \langle\, x \mid Q\,x \,\rangle &= \left\langle\, Q\,x + \overline{\Delta}^{\,2} Q\,x \mid Q\,x \,\right\rangle = \langle\, Q\,x \mid Q\,x \,\rangle + \left\langle\, \overline{\Delta} Q\,x \mid \overline{\Delta} Q\,x \,\right\rangle \\ &= ||Q\,x||^2 + ||\overline{\Delta} Q\,x||^2 \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Strenge Positivität folgt aus der Injektivität.

(iii) Seien x, y wie in Gleichung (4). Dann gilt:

$$Qx = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\Delta} Qx = 0 = y \quad \Rightarrow \quad \overline{\Delta} y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ .$$

(iv) Aus (6) folgt für $x \neq 0$:

$$||Q\,x||^2_{L^2} \leq ||x||^2_{L^2} - ||\overline{\Delta} Q\,x||^2_{L^2} \leq ||x||^2_{L^2} \quad \Rightarrow \quad ||Q|| \leq 1 \ .$$

□

3.1 Spektraltheorie kompakter, selbstadjungierter Operatoren

Unser Ziel ist es, vom Spektrum des kompakten Operators Q auf das des Laplace-Operators zu schließen. Die Funktionalanalysis liefert uns hierfür das nötige Rüstzeug an die Hand.

Satz 3.3 (Spektralsatz kompakter Operatoren) *Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{K}(X)$ ein kompakter Operator auf diesem. Dann gilt:*

(a) Die (eventuell leere) Menge $\sigma(T) \setminus \{0\}$ ist höchstens abzählbar.

(b) Jedes $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenwert von T, und der zugehörige Eigenraum ker$(\lambda - T)$ ist endlichdimensional.

(c) $\sigma(T)$ besitzt keinen von 0 verschiedenen Häufungspunkt.

Beweis

Satz (3.3) ist eine der Hauptaussagen der Funktionalanalysis und findet sich daher in jedem guten Buch zu diesem Thema, zum Beispiel in [2, S. 241], in [4, S. 319ff.] oder in [3]. □

Im Falle *selbstadjungierter*, kompakter Operatoren läßt sich die obige Aussage weiter verschärfen:

Satz 3.4 (Spektralsatz selbstadjungierter, kompakter Operatoren) *Sei X ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(X)$ selbstadjungiert. Dann existieren ein (evtl. endliches) Orthonormalsystem $e_1, e_2, \ldots$ sowie eine (evtl. abbrechende) Nullfolge $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ in $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ so, dass ...*

$$X = \ker\,(T) \oplus \overline{\langle\, e_1, e_2, \ldots \,\rangle}$$

... sowie ...

$$T\,x = \sum_k \lambda_k \;\langle\; x \mid e_k \;\rangle\;\; e_k \;\;.$$

Hierbei bezeichne $\langle\, e_1, e_2, \dots \,\rangle$ *den von den Vektoren aufgespannten Unterraum endlicher Linearkombinationen. Damit ist* X *die* Hilbertsche Summe *aus dem Kern des Operators und den endlichdimensionalen Eigenräumen* $E(\lambda_i)$*:*

$$X = \ker\,(T) \oplus \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}^{H} E(\lambda_i) \right) \;\;. \tag{7}$$

Außerdem ist $||T|| = \sup_k\, |\lambda_k|$*.*

Beweis

... basiert im wesentlichen auf Satz (3.3). Es läßt sich leicht zeigen, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind. Eine Betrachtung des orthogonalen Komplementes des von diesen Vektoren aufgespannten Raums liefert dann die Zerlegung (7) – (vollständiger Beweis siehe [2] oder [4]). □

Die Zerlegung (7) für den oben definierten Operator Q besteht aufgrund der Injektivität und Positivität lediglich aus Eigenräumen zu strikt positiven Eigenwerten λ. Aufgrund der Beziehung $\lambda \le ||Q|| \le 1\ \forall \lambda \in \sigma(Q) \setminus \{0\}$ sind diese außerdem durch 1 beschränkt und häufen sich wegen der Kompaktheit von Q höchstens bei 0. Jeder Eigenraum besteht zudem aus Schnitten in $H^2\Omega^k(M)$, schließlich ist dies der Bildbereich des Operators.

3.2 Spektralsatz des Laplace-Operators

Nach diesen Vorbereitungen ist der Schritt zum zentralen Theorem dieses Vortrages kein besonders großer mehr. Die Zerlegung (7) läßt sich auf geschickte Weise auf den Laplace-Operator übertragen, eine Tatsache, die im wesentlichen der Aufspaltung von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ in zwei Kopien des Graphen von $\overline{\Delta}$ zu verdanken ist.

Satz 3.5 (Spektralsatz des Laplace-Operators) *Es gibt eine Zerlegung von* $\mathcal{H}$ *in eine direkte Summe abzählbar vieler orthogonaler Unterräume* $\mathcal{H}_\mu$*. Jedes* $\mathcal{H}_\mu$ *ist endlichdimensional, enthält ausschließlich glatte Schnitte und ist außerdem ein Eigenraum für* $\overline{\Delta}$ *zum Eigenwert* μ*. Die Eigenwerte bilden eine diskrete Untermenge von* $\mathbb{R}$*.*

Beweis

Sei $x \in H^2\Omega^k(M)$ ein Eigenvektor von Q zum Eigenwert $0 < \lambda \le 1$. Nach (4) existiert ein $y \in H^2\Omega^k(M)$, so dass sich $(x, 0)$ in folgender Weise zerlegen läßt:

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Qx \\ \overline{\Delta}Qx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\Delta}y \\ -y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ \overline{\Delta}x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\Delta}y \\ -y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \lambda\,\overline{\Delta}x \quad \text{und} \quad \overline{\Delta}y = (1-\lambda)\,x \;.$$

Sei jetzt $\mu^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda}$, dann ist $\mu \in \mathbb{R}$ und $\mu \ge 0$. Ferner sei $z = \frac{1}{\lambda\mu}\,y$, dann gilt:

$$\overline{\Delta}\,x = \mu\,z \quad , \quad \overline{\Delta}\,z = \mu\,x \;.$$

Wegen $\overline{\Delta}^2 x = \mu^2\, x$ ist jeder Eigenraum $E_Q(\lambda)$ ein ebensolcher von $\overline{\Delta}^2$ zum Eigenwert μ^2. Allerdings gilt:

$$0 = \left(\overline{\Delta}^2 - \mu^2\right) x = \left(\overline{\Delta} - \mu\right) \left(\overline{\Delta} + \mu\right) x \quad \forall\, x \in E_{\overline{\Delta}^2}(\mu)\ .$$

Somit zerfällt für $\mu \neq 0$ jeder Raum $E_{\overline{\Delta}^2}(\mu)$ in zwei Eigenräume $E_{\overline{\Delta}}(\mu)$ und $E_{\overline{\Delta}}(-\mu)$ des LAPLACE-Operators, dessen Selbstadjungiertheit deren Orthogonalität erzwingt. Natürlich bleibt jeder Teilraum auch nach dieser Aufspaltung endlichdimensional. Somit haben wir die folgende Zerlegung gefunden:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}}^{H} E_{\overline{\Delta}}(\mu_i)\ .$$

Bleibt die Frage nach der Differenzierbarkeit der Schnitte. Doch diese folgt per vollständiger Induktion sofort aus Satz (2.6) zusammen mit dem SOBOLEV-Einbettungssatz (2.1): Sei $x \in H^2\Omega^k(M)$ mit $\overline{\Delta}\, x = \lambda\, x$. Dann folgt: $x \in H^s\Omega^k(M)\ \forall s \in \mathbb{N}$ und somit: $x \in C^\infty(\Omega^k(M))$. □

3.3 Funktionalkalkül

Die Idee dieses letzten Kapitels vor dem erlösenden Beispiel wird es sein, Ausdrücken der Form $f(\overline{\Delta})$ für beschränkte Funktionen f einen Sinn zu geben. Die Spektralzerlegung drängt die Gestalt, die solche Operatoren besitzen sollten, quasi kanonisch auf. Sei $\sigma(\overline{\Delta})$ das Spektrum des LAPLACE-Operators, dann läßt sich jeder Schnitt – und das war die Aussage des letzten Satzes – ähnlich einer Fourierzerlegung als orthogonale direkte Summe der folgenden Form schreiben:

$$s = \sum_{\lambda \in \sigma(\overline{\Delta})} s_\lambda\ ,$$

…wobei s_λ die Projektion des Vektors s auf den Eigenraum $E(\lambda)$ ist. Aus der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung (und auch aus der Anschauung) folgt sofort:

$$||s_\lambda||_{L^2}^2 = |\langle\ s \mid s_\lambda\ \rangle| \leq ||s_\lambda||_{L^2}\, ||s||_{L^2} \quad \Rightarrow \quad ||s_\lambda||_{L^2} \leq ||s||_{L^2}\ .$$

Für auf dem Spektrum $\sigma(\overline{\Delta})$ beschränkte Funktionen f läßt sich jetzt ein Operator $f(\overline{\Delta})$ auf $L^2(\Omega^k(M))$ wie folgt definieren:

$$f(\overline{\Delta})\ :\ L^2(\Omega^k(M)) \longrightarrow L^2(\Omega^k(M)) \quad ; \quad s \mapsto f(\overline{\Delta})\, s := \sum_{\lambda \in \sigma(\overline{\Delta})} f(\lambda)\, s_\lambda \tag{8}$$

…mit den Komponenten s_λ wie oben. Da eine Schranke für f existiert, konvergiert die Reihe und obige Abschätzung der s_λ zeigt, dass der Operator selbst beschränkt ist. f wirkt damit auf den Eigenraum $E(\lambda)$ durch Multiplikation mit $f(\lambda)$. Somit folgt diese Definition der gleichen Idee, die schon im endlichdimensionalen Fall für selbstadjungierte Matrizen Früchte trug: „Diagonalisiere“ und wende f auf die Diagonaleinträge an.

Eine interessante Frage ist nun, welche Gestalt die einzelnen Komponenten annehmen müssen, damit ihre Summe einen glatten Schnitt zutage fördert. Aufschluß hierüber liefert der nächste…

Satz 3.6 *Ein Schnitt $s \in L^2(\Omega^k(M))$ ist genau dann glatt (unendlich oft differenzierbar), falls ...*

$$||s_\lambda||_{L^2} = \mathcal{O}(|\lambda|^{-j})$$

... für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Dies induziert die folgende ...

Definition 3.2 *Eine Funktion f heißt* ***schnell fallend****, falls $|f(\lambda)| = \mathcal{O}(|\lambda|^{-j})$ $\forall j \in \mathbb{N}_0$. Ein Schnitt heißt schnell fallend, falls $||s_\lambda||_{L^2}$ schnell fallend in λ ist.*

Beweis

... des Satzes (3.6): Sei s_λ ein Eigenvektor von $\overline{\Delta}$ zum Eigenwert λ. Aus der Stetigkeit des LAPLACE-Operators (1) läßt sich per vollständiger Induktion die folgende Abschätzung gewinnen:

$$||s_\lambda||_{H^{2j}} \geq C_j\,|\lambda|^j ||s_\lambda||_{L^2}\ . \tag{9}$$

Die elliptische Ungleichung liefert in die andere Richtung...

$$||s_\lambda||_{H^{2j}} \leq \hat{C}_j\ (1+|\lambda|)^j\ ||s_\lambda||_{L^2}\ . \tag{10}$$

Gilt jetzt $||s_\lambda||_{L^2} = \mathcal{O}(|\lambda|^{-j})$ $\forall j \in \mathbb{N}_0$, dann fallen nach (10) auch die Normen $||s_\lambda||_{H^{2j}}$ schneller als alle Potenzen $|\lambda|^{-j}$ und die Reihe...

$$||s||_{H^{2j}} = \left\| \sum_{\lambda\in\sigma(\overline{\Delta})} s_\lambda \right\|_{H^{2j}} \leq \sum_{\lambda\in\sigma(\overline{\Delta})} ||s_\lambda||_{H^{2j}}$$

... konvergiert in jeder SOBOLEV-Norm – s ist somit glatt.

Falls ein J existiert, so dass $||s_\lambda||_{L^2}$ schneller wächst als $|\lambda|^{-J}$, dann besagt (9), dass $||s_\lambda||_{H^{2J}}$ unbeschränkt in λ ist, somit konvergiert die Reihe in dieser Norm nicht. Da C_{2J} stetig in H^{2J} eingebettet ist, kann der Schnitt nicht mehr glatt sein. $\square$

Somit besitzt das von uns in (8) entwickelte Funktionalkalkül für $\overline{\Delta}$ die folgenden hübschen Eigenschaften:

Satz 3.7 *Die Abbildung $f \mapsto f(\overline{\Delta})$ ist ein unitaler Homomorphismus vom Ring der beschränkten Funktionen auf dem Spektrum in die stetigen Operatoren $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, für den folgendes gilt:*

(i) Die Norm des Operators $f(\overline{\Delta})$ ist kleiner gleich dem Supremum von $|f|$.

(ii) Falls $\overline{\Delta}$ mit einem Operator A kommutiert, so gilt dies auch für jedes $f(\overline{\Delta})$.

(iii) Jedes $f(\overline{\Delta})$ bildet $C^\infty(\Omega^k(M))$ nach $C^\infty(\Omega^k(M))$ ab.

(iv) Falls $f(\lambda) = \lambda\, g(\lambda)$ mit f und g beschränkt, dann gilt: $f(\overline{\Delta}) = \overline{\Delta}\, g(\overline{\Delta})$ als beschränkte Operatoren.

Beweis

Die Eigenschaft unitaler Ringhomomorphismus zu sein, folgt direkt aus den Definitionen $(f \cdot g)(\lambda) = f(\lambda) \cdot g(\lambda)$ bzw. $(\alpha f + \beta g)(\lambda) = \alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in Verbindung mit (8).

(i) …ergibt sich aus der Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
||f(\overline{\Delta})||_{L^2} &= \sup_{||s||_{L^2}=1} \left\| \sum_\lambda f(\lambda)\, s_\lambda \right\|_{L^2} = \sup_{||s||_{L^2}=1} \sum_\lambda ||f(\lambda)\, s_\lambda||_{L^2} \\
&\leq \sup_{||s||_{L^2}=1} \sup_{\lambda \in \sigma(\overline{\Delta})} |f(\lambda)| \sum_\lambda ||s_\lambda||_{L^2} = \sup_{\lambda \in \sigma(\overline{\Delta})} |f(\lambda)| \sup_{||s||_{L^2}=1} \left\| \sum_\lambda s_\lambda \right\|_{L^2} \\
&= \sup_{\lambda \in \sigma(\overline{\Delta})} |f(\lambda)| \ .
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde zweimal die Orthogonalität der s_λ in der L^2-Norm ausgenutzt.

(ii) Sei s_λ ein Eigenvektor von $\overline{\Delta}$ zum Eigenwert λ, dann gilt für A:

$$\overline{\Delta}\, A s_\lambda = A\, \overline{\Delta} s_\lambda = \lambda\, A s_\lambda \ ,$$

d.h. As_λ ist ebenfalls ein Eigenvektor von $\overline{\Delta}$ zum selben Eigenwert. Damit ist allerdings die Projektion des Vektors As auf den Eigenraum zu λ gleich dem Vektor As_λ. Somit…

$$f(\overline{\Delta})(As) = \sum_{\lambda \in \sigma(\overline{\Delta})} f(\lambda)(As)_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(\overline{\Delta})} f(\lambda)\, A\, s_\lambda = A \sum_{\lambda \in \sigma(\overline{\Delta})} f(\lambda)\, s_\lambda = A\, (f(\overline{\Delta})\, s) \ .$$

(iii) …folgt sofort aus der Tatsache, dass das Produkt eines schnell fallenden Schnittes mit einer beschränkten Funktion wieder einen schnell fallenden Schnitt liefert.

(iv) Es gilt:

$$f(\overline{\Delta})\, s = \sum_{\lambda \in \sigma(\overline{\Delta})} f(\lambda)\, s_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(\overline{\Delta})} \lambda\, g(\lambda)\, s_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(\overline{\Delta})} \overline{\Delta}\, g(\lambda)\, s_\lambda = \overline{\Delta}\, g(\overline{\Delta})\, s \ .$$

Alle Summen konvergieren aufgrund der geforderten Beschränktheit von f und g tatsächlich, so dass auch die Vertauschung des Operators $\overline{\Delta}$ mit der Summenbildung legitim ist.

□

3.3.1 Glättende Operatoren

Punkt (iii) des obigen Satzes läßt sich noch weiter präzisieren. Falls f selbst nämlich schnell fallend ist, dann bildet wegen $||f(\lambda)\, s_\lambda||_{L^2} = |f(\lambda)|\, ||s_\lambda||_{L^2} \leq |f(\lambda)|\, ||s||_{L^2}$ der Operator $f(\overline{\Delta})$ den Raum $L^2(\Omega^k(M))$ in die glatten Schnitte $C^\infty(\Omega^k(M))$ ab (nach Satz (3.6)). Tatsächlich ist $f(\overline{\Delta})$ in diesem Fall ein glättender Operator. Zur Erinnerung…

Definition 3.3 *Ein beschränkter Operator T auf $L^2(\Omega^k(M))$ heißt* ***glättend****, falls er einen auf $M \times M$ glatten Kern $k(x,y)$ besitzt mit Werten $k(x,y) \in Hom(\Omega^k_y(M), \Omega^k_x(M))$. Somit...*

$$T\,s(x) = \int_M k(x,y)\,s(y)\,\mathrm{vol}(M) \ .$$

Jeder Projektor P_λ auf den N-dimensionalen Eigenraum $E(\lambda)$ (wir haben bereits $N < \infty$ gezeigt) läßt sich mit Hilfe einer Basis $e^{(i)}_\lambda$, $i = 1 \ldots N$ auf die folgende Weise darstellen:

$$P_\lambda\, s = \sum_{i=1}^{N} \left\langle\ e^{(i)}_\lambda \mid s\ \right\rangle e^{(i)}_\lambda$$

...und besitzt daher den Integralkern...

$$k_\lambda(x,y) = \sum_{i=1}^{N} e^{(i)\,*}_\lambda(y) \otimes e^{(i)}_\lambda(x) \ .$$

Wählen wir jetzt eine Karte, so dass die Symbole $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ mit einem Multiindex α und $\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}$ (mit β entsprechend) einen Sinn ergeben, dann läßt sich die Sobolev-s-Norm des Kerns durch C^s-Normen abschätzen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&\|\,k_\lambda\|_{H^s} \le C_s\,\|\,k_\lambda\|_{C^s} = C_s \sup_{(x,y)\in M\times M} \sum_{|\alpha|+|\beta|\le s} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\,k_\lambda(x,y)\right| \\
\le\ & C_s \sup_{(x,y)\in M\times M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|+|\beta|\le s} \left| \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\,e^{(i)}_\lambda(x)\right) \otimes \left(\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\,e^{(i)\,*}_\lambda(y)\right)\right| \\
=\ & C_s \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|+|\beta|\le s} \sup_{x\in M} \left| \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\,e^{(i)}_\lambda(x)\right)\right| \cdot \sup_{y\in M} \left| \left(\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\,e^{(i)\,*}_\lambda(y)\right)\right| \\
=\ & C_s \sum_{i=1}^{N} \left(\left\|e^{(i)}_\lambda\right\|_\infty \left\|e^{(i)\,*}_\lambda\right\|_{C^s} + \left\| \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\,e^{(i)}_\lambda \right\|_\infty \left\|e^{(i)\,*}_\lambda\right\|_{C^{s-1}} + \ldots \right)
\end{aligned}$$

Jetzt lassen sich die C^s-Normen durch Sobolev-Normen der Ordnung $s{+}p$ mit $p > \frac{\dim(M)}{2}$ abschätzen. Alle dabei auftretenden Ordnungen kleiner als $s + p$ sind mittels Rellichs Einbettungssatz auf $s + p$-Normen zurückzuführen. Wir ziehen die maximale der auftretenden Konstanten (endlich viele!) heraus und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\|\,k_\lambda\|_{H^s} \le \tilde{C}_s \sum_{i=1}^{N} \left(\left\|e^{(i)}_\lambda\right\|_\infty + \left\| \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\,e^{(i)}_\lambda \right\|_\infty + \ldots \right) \left\|e^{(i)\,*}_\lambda\right\|_{H^{s+p}} \\
=\ & \tilde{C}_s \sum_{i=1}^{N} \left\|e^{(i)}_\lambda\right\|_{C^s} \left\|e^{(i)\,*}_\lambda\right\|_{H^{s+p}} \le \widehat{C}_s \sum_{i=1}^{N} \left\|e^{(i)}_\lambda\right\|_{H^{s+p}} \left\|e^{(i)\,*}_\lambda\right\|_{H^{s+p}}
\end{aligned}$$

Da $e_\lambda^{(i)}$ Elemente des Eigenraumes sind, gilt für diese die Abschätzung (10):

$$\left\| e_\lambda^{(i)} \right\|_{H^{2s}} \leq C_s \, (1 + |\lambda|)^s \, \left\| e_\lambda^{(i)} \right\|_{L^2} = C_s \, (1 + |\lambda|)^s$$

(für die dualen Vektoren genauso). Somit für $j > \frac{s}{2}$ ...

$$\| \, k_\lambda \|_{H^s} \leq \widehat{C}_s \, N \, (1 + |\lambda|)^{2(j+p)} \ .$$

Damit ist der Kern des Operators durch ein Polynom in λ beschränkt. Schnell fallende f besitzen demnach einen glatten Kern, da die Reihe:

$$f(\overline{\Delta}) = \sum_\lambda f(\lambda) \, P_\lambda$$

... mit den Projektoren P_λ nicht nur in der durch die Operatornorm gegebenen Topologie, sondern auch in der der glättenden Integralkerne konvergiert. Tatsächlich läßt sich über die obige Abschätzung sogar zeigen, dass die Abbildung, die jeder Funktion f aus dem Raum $\mathcal{R}(\mathbb{R})$ der schnell fallenden Funktionen den entsprechenden Kern des zugehörigen Operators $f(\overline{\Delta})$ zuordnet, stetig ist. Hierbei ist die Topologie auf $\mathcal{R}$ gegeben durch die abzählbare Schar von Halbnormen:

$$||f||_{\mathcal{R},s} = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)| \, (1 + |\lambda|)^s$$

... und die Abbildung läßt sich folgendermaßen notieren:

$$\psi \ : \ \mathcal{R}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M \times M) \ ; \ f \mapsto \sum_\lambda f(\lambda) \, k_\lambda \ .$$

Dann gilt (mit $s \geq i + \frac{\dim(M)}{2}$):

$$\begin{aligned} & \|\psi f\|_{C^i} \leq \sum_\lambda \|f(\lambda) \, k_\lambda\|_{C^i} \leq C_s \sum_\lambda \|f(\lambda) \, k_\lambda\|_{H^s} \\ \leq \ & C_s \sum_\lambda |f(\lambda)| \, (1 + |\lambda|)^{2(j+p)} \leq C_s \sum_\lambda |f(\lambda)| \, (1 + |\lambda|)^{2(j+p)+l} \, (1 + |\lambda|)^{-l} \\ \leq \ & C_s \sum_\lambda (1 + |\lambda|)^{-l} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)| \, (1 + |\lambda|)^{2(j+p)+l} \leq C_s \sum_\lambda (1 + |\lambda|)^{-l} \max_{r \in \mathbb{N}_0} \|f\|_{\mathcal{R},r} \ . \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dasss die Summe in der letzten Zeile tatsächlich konvergiert. Dies ist dann der Fall, falls die Eigenwerte λ nicht zu langsam anwachsen. Um dies zu beweisen, ist eine Abschätzung nötig, die auf der elliptischen Ungleichung und dem Sobolev-Einbettungssatz beruht (in derselben Weise wie (10)). Sie soll hier jedoch lediglich erwähnt werden:

$$j \leq C^2 \, (1 + |\lambda_j|)^p \qquad \text{mit} \quad p > \frac{\dim(M)}{2} \ .$$

Die Konsequenzen unserer Analyse lassen sich am besten an konkreten Beispielen betrachten. Hierzu bietet sich ein aus der Physik wohlbekanntes Problem an.

4 Die Wärmeleitungsgleichung

Aus der Physik, besonders der Hydro- und Thermodynamik, sind sogenannte Kontinuitätsgleichungen der Form ...

$$\mathrm{div}(\varrho\,\vec{v}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

... mit einem Vektorfeld $\vec{v}(t,x)$ und einem skalaren Feld $\varrho(t,x)$ wohlbekannt. Sie treten immer dann auf, wenn eine Größe erhalten ist, denn ihre Aussage lautet, etwas salopp formuliert: Es gibt keine „Quellen“ oder „Senken“ für die Größe ϱ im betrachteten System. Falls ϱ eine Massendichte ist, scheint diese Interpretation sehr anschaulich, sie läßt sich aber auch auf abstraktere Begriffe übertragen.

Betrachten wir zum Beispiel ein Feld $T(t,x)$, das jedem Punkt eines Körpers eine Temperatur zuweist. $\vec{\nabla}T$ beschreibt dann die Richtung, in der der Temperaturanstieg am größten ist. Angesichts der Tatsache, dass heiße Stellen im Laufe der Zeit immer kälter werden, wird sich die Temperatur entlang des Vektorfeldes $\vec{v} = -\vec{\nabla}T$ „bewegen“. Jetzt existiert eine Kontinuitätsgleichung, die die Energiedichte $c\,T$ (mit einer Konstanten c) mit dem Energiefluß $\vec{j} = k\,\vec{v} = -k\,\vec{\nabla}T$ (k ebenfalls konstant) verknüpft und daher die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned} & -\vec{\nabla}\cdot\left(k\,\vec{\nabla}T\right) + c\,\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & k\,\Delta T + c\,\frac{\partial T}{\partial t} = 0\ . \end{aligned} \tag{11}$$

Nach dieser kurzen physikalischen Motivation haben wir einen Vertreter der partiellen Differentialgleichungen gefunden, die den nun wohlbekannten LAPLACE-Operator enthält und deren Lösungstheorie im folgenden untersucht wird. Dabei soll die Lösung der Gleichung glatt vom Zeitparameter t abhängen. Wir verwenden die Bezeichnung T_t für die Abbildung $t \mapsto T(\cdot,t)$.

Es fehlt uns zur Herleitung eines Existenz- und Eindeutigkeitssatzes noch eine nicht ganz unwesentliche Zutat, die hier nur erwähnt, aber nicht bewiesen werden soll, nämlich die Positivität des LAPLACE-Operators, d.h. $\sigma(\overline{\Delta}) \subset \mathbb{R}_+$. Tatsächlich ist es dann allerdings nicht mehr schwierig, mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 4.1 *Die Wärmeleitungsgleichung (11) hat zu gegebenen glatten Anfangsdaten T_0 eindeutige glatte Lösungen T_t. Diese existieren für alle $t \geq 0$ und genügen der folgenden Abschätzung...*

$$||T_t||_{L^2} \leq ||T_0||_{L^2}\ .$$

Beweis

Zunächst zur Eindeutigkeit und der angesprochenen Abschätzung. Letztere folgt unter der Annahme der Existenz einer glatten Lösung T_t aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}||T_t||^2_{L^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\langle\, T_t \mid T_t\,\rangle \\ &= -\langle\, \Delta T_t \mid T_t\,\rangle - \langle\, T_t \mid \Delta T_t\,\rangle \\ &= -2\,\langle\, T_t \mid \Delta T_t\,\rangle \leq 0 \end{aligned}$$

An dieser Stelle wurde ein erstes Mal die Positivität benutzt. Aus dem eben Bewiesenen folgt, dass $||T_t||^2$ eine in t monoton fallende Funktion ist, und wir erhalten die a priori Abschätzung:

$$||T_t||_{L^2}^2 \leq ||T_0||_{L^2}^2 \qquad (t \geq 0) \ . \tag{12}$$

Angenommen, es gäbe zu einer Anfangsbedingung T_0 zwei Lösungen $T_t^{(1)}$ und $T_t^{(2)}$, dann wäre aufgrund der Linearität der Differentialgleichung (11) ihre Differenz eine Lösung zur Bedingung $T_0^- = 0$. Dann folgt allerdings aus (12) ...

$$T_t^{(1)} = T_t^{(2)} \ .$$

Der interessante Teil des Beweises beschäftigt sich mit der Existenz glatter Lösungen. Gleichung (11) „schief anschauend" liegt uns der Ausdruck ...

$$T_t = e^{-t\Delta}\, T_0$$

... auf der Zunge. Formal erfüllt er ...

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} = -\Delta\, T_t \ .$$

Das im letzten Abschnitt entwickelte Funktionalkalkül liefert tatsächlich eine angemessene Definition hierfür. Da ferner die Funktion...

$$f_t \ : \ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad ; \quad \lambda \mapsto e^{-t\,\lambda} \ .$$

... unendlich oft differenzierbar in t ist, erbt auch T_t diese Eigenschaft. □

Die letzten Bemerkungen des vorangegangenen Kapitels liefern weitere Aussagen über den Lösungsoperator $e^{-t\Delta}$. Da $f_t(\lambda) = \mathcal{O}(|\lambda|^{-s})\ \forall s \in \mathbb{N}_0$ handelt es sich dabei um einen glättenden Operator. Daher existiert ein zeitabhängiger Integralkern k_t, so dass:

$$e^{-t\Delta}T(x) = \int_M k_t(x,y)\, T(y)\, \mathrm{vol}(M) \ .$$

... für alle $t > 0$ — der sogenannte Wärmeleitungskern (engl. *heat kernel*). Interessant sind nun die Approximationen, die für diesen Kern gefunden werden können und seine Eigenschaft, für $t \to 0$ gegen eine δ-Distribution zu konvergieren. Dies mag als Ausblick dienen, welche Gefilde wir mit dem Spektralsatz des LAPLACE-Operators betreten haben.

Literatur

[1] ROE, J. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods.* Addison Wesley Longman Ltd. – second edition

[2] WERNER, D. *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, Berlin – 4. überarbeitete Auflage

[3] DUNFORD, N.T.; SCHWARTZ, J.T. *Linear Operators Part II: Spectral Theory.* Wiley, 1963

[4] DIEUDONNÉ, J. *Eléments d'analyse.* Gauthier-Villars, Paris