Seminar "De Rham Kohomologie und harmonische Differentialformen" - 2. Sitzung

Torsten Hilgenberg

26. April 2004

1 Orientierung

Definition: Zwei Karten heißen **orientiert verbunden**, wenn das Differential des Kartenwechsels positive Determinante hat.
Unter einer **Orientierung** einer Mannigfaltigkeit versteht man z.B. einen maximalen orientiert verbundenden Atlas. Die Tangentialräume seien dann so orientiert, daß die Differentiale der Kartenabbildungen orientierungserhaltend sind, wenn der $\mathbb{R}^n$ mit der Standardorientierung $[(e_1, \ldots, e_n)]$ versehen ist.
Ein Diffeomorphismus $f : M \to N$ zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten heißt **orientierungserhaltend (bzw. -umkehrend)**, wenn für alle $p \in M$ sein Differential $d_p f : T_pM \to T_{f(p)}N$ orientierungserhaltend (bzw. -umkehrend) ist.

2 Integration

1) Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Da $\dim \operatorname{Alt}^n \mathbb{R}^n = 1$, ist φ^* die Multiplikation mit einer reellen Zahl. Wegen $(\varphi^* \det)(e_1, \ldots, e_n) = \det(\varphi e_1, \ldots, \varphi e_n) = \det \varphi$ gilt $\varphi^* \omega = \det(\varphi) \cdot \omega$ für alle $\omega \in \operatorname{Alt}^n \mathbb{R}^n$.

2) Für $\omega = f\, dx_1 \cdots dx_n \in \Omega^n_c \mathbb{R}^n$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen sei $\int_U \omega := \int_U f\, dx$. Dann gilt für jeden C^1-Diffeomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(V) = U$:

$$\begin{aligned} \int_U \omega \; &\underset{\text{Def}}{=} \; \int_U f\, dx \underset{\text{TF}}{=} \int_V (f \circ \varphi)\, |\det d\varphi|\, dx \underset{\text{Diffeo.}}{=} \pm \int_V (f \circ \varphi) \det d\varphi\, dx \\ &\underset{(1)}{=} \; \pm \int_V (\varphi^* f)\, d\varphi^*(dx_1 \cdots dx_n) = \pm \int_V \varphi^* \omega, \end{aligned}$$

dabei ist das Vorzeichen genau dann positiv (negativ), wenn φ orientierungserhaltend (-umkehrend) ist.

3) Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^n_c M$ mit $\operatorname{Tr} \omega \subset U$ für eine orientierungserhaltende Karte (U, h). Dann ist $\int_M \omega := \int_U \omega := \int_{h(U)} (h^{-1})^* \omega$ wegen (2) wohldefiniert.

4) Für beliebiges $\omega \in \Omega^n_c M$ sei M durch Kartengebiete (U_i, h_i) überdeckt und (τ_i) eine subordinierte Partition der Eins. Das Integral von ω ist dann definiert durch: $\displaystyle\int_M \omega := \sum_i \int_{U_i} \tau_i\, \omega$. Wegen der lokalen Endlichkeit einer Partition der Eins und da $\operatorname{Tr} \omega$ kompakt ist, sind nur endlich viele $\tau_i\, \omega \neq 0$ und die Summe

existiert jedenfalls. Zur Wohldefiniertheit: Sei (V_j, k_j) ein weiterer Altas, und (σ_j) eine subordinierte Partition der Eins. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_j \int_{V_j} \sigma_j\,\omega &= \sum_j \sum_i \int_{V_j} \tau_i \sigma_j\,\omega \quad \text{wegen } \textstyle\sum_i \tau_i = 1 \\
&= \sum_j \sum_i \int_{V_j \cap U_i} \tau_i \sigma_j\,\omega \quad \text{da } \mathrm{Tr}\,\tau_i \subset U_i \\
&= \sum_i \sum_j \int_{U_i} \tau_i \sigma_j\,\omega = \sum_i \int_{U_i} \tau_i\,\omega.
\end{aligned}$$

Notiz (Transformationsformel)**:** Aus (2) folgt sofort, daß für einen Diffeomorphismus $\varphi : M \to N$ und $\omega \in \Omega_c^n(N)$ gilt: $\int_M \varphi^*\omega = \pm \int_N \omega$ (positives Vorzeichen, wenn φ orientierungserhaltend und negatives, wenn -umkehrend ist).

2.1 Berandete Mannigfaltigkeiten

Definition: Ein Homöomorphismus h zwischen einer offenen Teilmenge eines Raumes M und einer in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{H}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geqslant 0\}$ offenen Teilmenge heißt berandete n-dimensionale Karte für M. Damit kann man dann berandete Altanten, berandete differenzierbare Strukturen, etc definieren.
Eine n-dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand** ist ein zweitabzählbarer Hausdorffraum mit einer berandeten differenzierbaren Struktur. Der Rand ∂M von M besteht aus allen Punkten, die durch eine (dann jede) Karte nach $\partial\mathbb{H}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times 0$ abgebildet werden.
Eine Abbildung soll in einem Randpunkt differenzierbar heißen, wenn sie sich bezüglich Karten differenzierbar auf eine in $\mathbb{R}^n$ offene Umgebung fortsetzen läßt.

Der Rand ∂M erhält durch die Einschränkung der Karten von M einen $(n-1)$-dimensionalen Atlas und wird so zu einer (unberandeten) $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Konvention: Sei $\mathbb{H}^n$ mit der Standardorientierung $(e_1, \ldots, e_n)$ versehen. Damit der Satz von Stokes ohne Vorzeichen gilt, ist die **induzierte Orientierung** auf $\partial\mathbb{H}^n$ durch die Karte

$$h : \partial\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{n-1}, (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \mapsto ((-1)^n x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

gegeben. Allgemeiner sei für eine positiv orientierte Karte $(h_1, \ldots, h_n) : U \to \mathbb{H}^n$ die Karte $\partial U \to \mathbb{R}^{n-1}, x \mapsto ((-1)^n h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x))$ positiv orientiert.

3 Der Satz von Stokes

Notation: $X_1 \cdots \widehat{\mu} \cdots X_n$ soll heißen, daß der μ-te Faktor fehlt.
$\int f\,|dt|$ ist einfach das Integral über t ($|dt|$ weil es dann nicht mit der 1-Form zu verwechseln ist).

Satz (Stokes)**:** Sei M eine orientierte n-dimensionale berandete Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ eine $(n-1)$-Form mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Dabei soll ∂M mit der induzierten Orientierung versehen sein und $\int_{\partial M} \omega$ bedeutet $\int_{\partial M} i^*\omega$, wobei $i : \partial M \hookrightarrow M$ die Inklusion ist.

Beweis: 1. Schritt – $M = \mathbb{R}^n$: Sei $\omega = \sum_{\mu=1}^n f_\mu\, dx_1 \cdots \widehat{\mu} \cdots dx_n$, also

$$d\omega = \sum_{\mu=1}^n \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu \right) dx_1 \cdots \widehat{\mu} \cdots dx_n = \sum_{\mu=1}^n (-1)^{\mu-1} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\, dx \quad &\underset{\text{Fubini}}{=} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\, dx_\mu \right) dx_1 \cdots \widehat{\mu} \cdots dx_n \\
&\underset{\text{HDI}}{=} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} [f_\mu(x_1, \ldots, x_n)]_{x_\mu=-\infty}^{x_\mu=\infty}\, dx_1 \cdots \widehat{\mu} \cdots dx_n \\
&\underset{\text{komp.Tr.}}{=} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (0-0)\, dx_1 \cdots \widehat{\mu} \cdots dx_n = 0
\end{aligned}$$

gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = \sum_{\mu=1}^n (-1)^{\mu-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\, dx = 0 = \int_{\varnothing} i^*\omega = \int_{\partial \mathbb{R}^n} i^*\omega.$$

2. Schritt – $M = \mathbb{H}^n$: Für $\mu \neq n$ gilt wieder $\displaystyle\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\, dx = 0$ aber hier ist

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\, dx \quad &\underset{\text{Fubini}}{=} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\, dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&\underset{\text{HDI}}{=} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x_1, \ldots, x_n)]_{x_n=0}^{x_n=\infty}\, dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&\underset{\text{komp.Tr.}}{=} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (0 - f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0))\, dx_1 \cdots dx_{n-1},
\end{aligned}$$

und daher

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Andererseits ist $i^* dx_\mu = d\, i^* x_\mu = d(x_\mu \circ i) = \begin{cases} dx_\mu & \text{für } \mu \neq n \\ 0 & \text{für } \mu = n \end{cases}$, und somit

$$i^*\omega = \sum_{\mu=1}^n (i^* f_\mu)\, (i^* dx_1) \cdots \widehat{\mu} \cdots (i^* dx_n) = (f_n \circ i)\, dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Die Orientierungskonvention besagt jetzt, daß die Karte $(\partial\mathbb{H}^n, (x_1,\ldots,x_{n-1},0) \mapsto (x_1,\ldots,x_{n-1}))$ genau dann positiv orientiert ist, wenn n gerade ist. Also gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{H}^n} i^*\omega &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f_n \circ i)\, dx \\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\, dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&= \int_{\mathbb{H}^n} d\omega
\end{aligned}$$

3. und letzter Schritt – M beliebige Mannigfaltigkeit: Sei $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ ein orientierter Atlas und $\{\tau_\alpha\}$ eine subordinierte Zerlegung der Eins. Da d und das Integral linear sind, genügt es, den Satz für alle $\tau_\alpha\,\omega$ zu beweisen. Da h_α orientierungserhaltend ist, folgt mit der Transformationsformel und der Natürlichkeit der Cartan-Ableitung

$$\int_M d(\tau_\alpha\,\omega) = \int_{U_\alpha} d(\tau_\alpha\,\omega) \underset{\text{TF}}{=} \int_{h_\alpha(U_\alpha)} (h_\alpha^{-1})^*\, d(\tau_\alpha\,\omega) \underset{\text{Nat.}}{=} \int_{h_\alpha(U_\alpha)} d\,(h_\alpha^{-1})^*\,(\tau_\alpha\,\omega).$$

Die Form $(h_\alpha^{-1})^*\, d(\tau_\alpha\,\omega)$ hat wieder kompakten Träger und wenn man sie durch Null auf ganz $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{H}^n$ fortsetzt, kann man den 1. bzw. 2. Schritt anwenden und erhält

$$\int_{h_\alpha(U_\alpha)} d\,(h_\alpha^{-1})^*\,(\tau_\alpha\,\omega) = \int_{h_\alpha(\partial U_\alpha)} (h_\alpha^{-1})^*\,(\tau_\alpha\,\omega) \underset{\text{TF}}{=} \int_{\partial U_\alpha} \tau_\alpha\,\omega = \int_{\partial M} \tau_\alpha\,\omega.$$

Die Transformationsformel kann man erneut anwenden, da mit h_α auch $h_\alpha|\partial U_\alpha$ orientierungserhaltend ist. $\square$

4 Poincaré-Lemma

Sei $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, (x,t) \mapsto x$ die Projektion und $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, x \mapsto (x,0)$ der Nullschnitt. Wegen $\pi s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ gilt auch $(\pi s)^* = s^*\pi^* = \mathrm{id}_{\Omega^*(\mathbb{R}^n)}$ und $s^*\pi^* = \mathrm{id}_{H^*(\mathbb{R}^n)}$.

4.1 Satz: $s^* : H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to H^*(\mathbb{R}^n)$ und $\pi^* : H^*(\mathbb{R}^n) \to H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ sind zueinander inverse Isomorphismen.

Beweis: Zu zeigen ist noch $\pi^*s^* = \mathrm{id}_{H^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})}$. Dazu genügt es, eine lineare Abbildung $K : \Omega^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ zu finden, die

$$\mathrm{id}_{\Omega^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} - \pi^*s^* = \pm(dK - Kd) \qquad (*)$$

erfüllt, denn für alle ω mit $d\omega = 0$ ist dann $(dK - Kd)\omega = dK\omega - Kd\omega = d(K\omega)$ und somit $\mathrm{id} - \pi^*s^*$ auf $H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ die Nullabbildung.

Sei nun $K : \Omega^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ definiert durch [1]

$$\begin{array}{ll} (1) & K(f(x,t)\,dx_I) := 0 \\ (2) & K(f(x,t)\,dx_J\,dt) := dx_J \int_0^t f \end{array}$$

Nebenrechnung: $\pi^*s^*dx_i = d(x_i \circ s \circ \pi) = dx_i$ und $\pi^*s^*dt = d(t \circ s \circ \pi) = d\,0 = 0$, sowie $\pi^*s^*f(x,t) = (f \circ s \circ \pi)(x,t) = f(x,0)$.

Für $\omega = f(x,t)\,dx_I$ gilt:

$$\begin{aligned} (dK - Kd)\omega &= 0 - Kd\omega = -K\left(\frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right) dx_I \\ &= -K\left(\frac{\partial f}{\partial t}\,dt\right) dx_I \quad \text{nach Definition (1)} \\ &= -K\,(-1)^k \frac{\partial f}{\partial t}\,dx_I\,dt \\ &= (-1)^{k+1} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}\,|dt|\,dx_I \\ &= (-1)^{k+1} dx_I\,(f(x,t) - f(x,0)) \\ &= (-1)^{k+1}(\omega - \pi^*s^*\omega) \end{aligned}$$

Sei nun $\omega = f(x,t)\,dx_J\,dt$. Wegen $\pi^*s^*dt = 0$ ist $(\mathrm{id} - \pi^*s^*)\omega = \omega$. Ausserdem:

$$\begin{aligned} Kd\omega &= K\left(\frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right) dx_J\,dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}|dt|\,dx_i\,dx_J \end{aligned}$$

[1] $dx_I = dx_{\mu_1} \cdots dx_{\mu_k}$ und $dx_J = dx_{\mu_1} \cdots dx_{\mu_{k-1}}$

und

$$
\begin{aligned}
dK\omega &= d\left(\int_0^t f(x,\tau)|d\tau|\,dx_J\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}|dt|\,dx_i \,+ f(x,t)\,dt\right)\,dx_J
\end{aligned}
$$

Also $(dK - Kd)\omega = (-1)^{k-1}\omega = (\mathrm{id} - \pi^* s^*)\omega$.
Somit gilt $dK - Kd = (-1)^{k-1}(\mathrm{id} - \pi^* s^*)$ für alle k-Formen. □

4.1.1 Korollar (Poincaré-Lemma)**:** $H^k(\mathbb{R}^n) \cong H^k(\mathbb{R}^0) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Sei allgemeiner M eine Mannigfaltigkeit und $\pi : M \times \mathbb{R} \to M, (p,t) \mapsto p$ sowie $s_t : M \to M \times \mathbb{R}, p \mapsto (p,t)$. Fast wörtlich genau so wie oben zeigt man, daß für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ die Abbildungen $s_t^* : H^*(M \times \mathbb{R}) \to H^*(M)$ und $\pi^* : H^*(M) \to H^*(M \times \mathbb{R})$ zueinander inverse Isomorphismen sind.

4.1.2 Korollar (Homotopie-Invarianz)**:** Seien $f, g : M \to N$ C^∞-homotope Abbildungen. Dann gilt $f^* = g^*$

Beweis: Sei $F : M \times \mathbb{R} \to N$ eine C^∞-Homotopie von f nach g. Dann ist $f = F \circ s_0$ und $g = F \circ s_1$. Also $f^* = (F \circ s_0)^* = s_0^* \circ F^*$ und $g^* = (F \circ s_1)^* = s_1^* \circ F^*$. Nun sind s_1^* und s_0^* beide invers zu π^*, also gleich und somit auch $f^* = g^*$. □

Definition: Zwei Mannigfaltigkeiten M und N heißen **homotopieäquivalent im C^∞-Sinn**, wenn es differenzierbare Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to M$ gibt, so daß $f \circ g$ und $g \circ f$ C^∞-homotop zu id_N bzw. id_M sind.

4.1.2.1 Korollar: Im C^∞-Sinne homotopieäquivalente Mannigfaltigkeiten haben die selbe de Rham Kohomologie.

Beweis: Dann ist $g^* f^* = (fg)^* = \mathrm{id}^*_{H^*N}$ und $f^* g^* = (gf)^* = \mathrm{id}^*_{H^*M}$. Also sind f^* und g^* Isomorphismen. □

Definition: Ein Teilraum A eines Raumes X heißt **Deformationsretrakt**, wenn es eine Abbildung $\rho : X \to A$ mit $\rho \circ i = \mathrm{id}_A$ und $i \circ \rho \simeq \mathrm{id}_X$ gibt. Dabei soll $i : A \to X$ die Inklusion sein. ρ heißt dann **Deformationsretraktion**.

4.1.2.2 Korollar: Ist eine Untermannigfaltigkeit $M_0 \subset M$ Deformationsretrakt von M, so haben M und M_0 die selbe de Rham Kohomologie.

5 Poincaré Lemma für $H_c^* \mathbb{R}^n$

Da $\pi^*\omega$ im allgemeinen keinen (nur für $\omega = 0$) kompakten Träger hat, definiert man stattdessen $\pi_* : \Omega_c^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ durch

(1) $f(x,t)\,dx_I \mapsto 0$

(2) $f(x,t)\,dx_J\,dt \mapsto dx_J \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)|dt|$

Diese Abbildung erfüllt $d\pi_* = \pi_* d$, denn für Formen vom Typ (1):

$$\begin{aligned}
\pi_* d\, f(x,t)\, dx_I &= \pi_* \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_I \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\partial f}{\partial t} |dt|\, dx_I + \sum 0 \\
&= (-1)^k (f(x,\infty) - f(x,-\infty))\, dx_I \\
&= (-1)^k (0-0) = 0 = \pi_*\omega = d\pi_*\omega
\end{aligned}$$

und für Formen vom Typ (2):

$$\begin{aligned}
\pi_* d\omega &= \pi_* d\, f(x,t)\, dx_J\, dt \\
&= \pi_* \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_J\, dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} |dt|\, dx_i\, dx_J \\
&= d \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) |dt|\, dx_J - d \text{ auf } \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^n) \\
&= d\pi_*\omega
\end{aligned}$$

Also induziert π_* eine Abbildung $\pi_* : H_c^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to H_c^{k-1}(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun $e = e(t)dt \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} e = 1$ und $e_* : \Omega_c^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega_c^{k+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), \omega \mapsto \omega \wedge e$. Auch diese Abbildung kommutiert mit d, denn $de_*\omega = d(\omega \wedge e) = (d\omega) \wedge e + (-1)^k \omega \wedge de = (d\omega) \wedge e = e_* d\omega$, da de als 2-Form auf $\mathbb{R}$ natürlich Null ist.

Aus den Definitionen folgt sofort $\pi_* e_* = \mathrm{id}_{\Omega_c^k(\mathbb{R}^n)}$:

$$\begin{aligned}
\pi_* e_* \omega &= \pi_* e_* f(x) dx_I = \pi_* f(x) e(t) dx_I\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(t) |dt|\, dx_I \\
&= f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e(t) |dt|\, dx_I = \omega
\end{aligned}$$

und damit auch $\pi_* e_* = \mathrm{id}_{H_c^k(\mathbb{R}^n)}$. Um $e_* \pi_* = \mathrm{id}_{H_c^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}$ zu zeigen, definiert man $K : \Omega_c^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ durch

(1) $f(x,t)\, dx_I \mapsto 0$

(2) $f(x,t)\, dx_J\, dt \mapsto dx_J \left(\int_{-\infty}^{t} f(x,\tau) |d\tau| - \int_{-\infty}^{t} e(\tau) |d\tau| \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) |dt| \right)$

Satz: Auf $H_c^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ gilt $\mathrm{id} - e_* \pi_* = (-1)^{k-1}(dK - Kd)$.

Beweis: (1) Für $\omega = f(x,t)\,dx_I$ gilt $(\mathrm{id} - e_*\pi_*)\omega = \omega$, da $\pi_*\omega = 0$;

$$\begin{aligned}
(dK - Kd)\omega &= d0 - K\,df(x,t)\,dx_I \\
&= -K\left(\frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right)dx_I \\
&= -K\frac{\partial f}{\partial t}dt\,dx_I \\
&= (-1)^{k+1}dx_I\left(\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial f}{\partial t} - \int_{-\infty}^{t}e\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \\
&= (-1)^{k+1}dx_I\left(f(x,t) - \int_{-\infty}^{t}e\cdot 0\right) \\
&= (-1)^{k+1}\omega
\end{aligned}$$

(2): $\omega = f(x,t)\,dx_J\,dt$, also

$$(\mathrm{id} - e_*\pi_*)\omega = \omega - \int_{-\infty}^{\infty} f|dt|\,dx_J \wedge e.$$

Andererseits

$$\begin{aligned}
dK\omega &= d\left(\int_{-\infty}^{t} f - \int_{-\infty}^{t} e\int_{-\infty}^{\infty} f\right)dx_J \\
&= \left(\left(f - e(t)\int_{-\infty}^{\infty} f\right)dt + \sum_{i=0}^{n}\left(\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \int_{-\infty}^{t}e\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)dx_i\right)dx_J
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
Kd\omega &= K\left(\frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right)dx_J\,dt \\
&= K\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\,dx_J\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \int_{-\infty}^{t}e\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)dx_i\,dx_J
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
(dK - Kd)\omega &= (-1)^{k-1}\left(f - e(t)\int_{-\infty}^{\infty} f\right)dx_J\,dt \\
&= (-1)^{k-1}\left(\omega - \int_{-\infty}^{\infty} f|dt|\,dx_J\,e(t)dt\right) \\
&= (-1)^{k-1}(\mathrm{id} - e_*\pi_*)\omega
\end{aligned}$$

□

Korollar: $\pi_* : H_c^{k+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to H_c^k(\mathbb{R}^n)$ und $e_* : H_c^k(\mathbb{R}^n) \to H_c^{k+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ sind zueinander inverse Isomorphismen. □

Korollar (Poincaré-Lemma)**:** $H_c^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ □

Notiz: Im Gegensatz zu H^* ist H_c^* also nicht homotopie-invariant.